



Teoría de Campo Unificada
de Einstein-Cartan-Evans.

La Base Geométrica de la Física.

Horst Eckardt

Traducción: Alex Hill

En Memoria de
Myron W. Evans
(1950 - 2019)

Título original en idioma inglés: EINSTEIN-CARTAN-EVANS UNIFIED FIELD THEORY
The Geometrical Basis of Physics

Traducción: Alex Hill

Copyright © 2019 Horst Eckardt

PUBLICADA POR EL AUTOR

WWW.AIAS.US

Arreglo creado con el estilo Legrand Orange Book por LaTeXTemplates.com.

Imágenes extraídas del portal gratuito unsplash.com

Fecha de creación: Junio 8, 2019



Contenido

1	Introducción	7
----------	---------------------------	----------

I	Primera Parte: Geometría
----------	---------------------------------

2	Matemática de la geometría de Cartan	13
2.1	Transformaciones de coordenadas	13
2.1.1	Transformaciones de coordenadas en álgebra lineal	13
2.1.2	Transformación gral de coordenadas y diferenciales de coordenadas	16
2.1.3	Transformaciones en espacios curvos	20
2.2	Tensores	22
2.3	Variedad base y espacio tangente	24
2.4	Diferenciación	29
2.4.1	Diferenciación covariante	30
2.4.2	Compatibilidad métrica y transporte paralelo	32
2.4.3	Derivada exterior	38
2.5	Geometría de Cartan	42
2.5.1	Espacio tangente, tétradas y métrica	42
2.5.2	Derivadas en espacio tangente	44
2.5.3	Derivadas exteriores en espacio tangente	45
2.5.4	Postulado de la tétrada	46
2.5.5	Lema de Evans	48
2.5.6	Ecuaciones estructurales de Maurer-Cartan	49
3	Teoremas fundamentales de la geometría de Cartan	53
3.1	Identidad de Cartan-Bianchi	53

3.2	Identidad de Cartan-Evans	55
3.3	Formas alternativas de identidad de Cartan-Bianchi y de Cartan-Evans	60
3.3.1	Identidad de Cartan-Evans	60
3.3.2	Identidad de Cartan-Bianchi	61
3.3.3	Consecuencias de las identidades.	62
3.4	Otras identidades	62
3.4.1	Identidad de torsión de Evans (primera identidad de Evans).	62
3.4.2	Identidad de Jacobi	63
3.4.3	Identidad de Bianchi-Cartan-Evans	63
3.4.4	Identidad de Jacobi-Cartan-Evans	64



Primera Parte: Geometría

2	Matemática de la geometría de Cartan. .	13
2.1	Transformación de coordenadas	
2.2	Tensores	
2.3	Variedad base y espacio tangente	
2.4	Diferenciación	
2.5	Geometría de Cartan	
3	Teoremas fundamentales de la geometría de Cartan	53
3.1	Identidad de Cartan-Bianchi	
3.2	Identidad de Cartan-Evans	
3.3	Formas alternas de la identidad de Cartan-Bianchi y Cartan-Evans	
3.4	Otras identidades	



1. Introducción

La geometría es visible en todas partes de la vida diaria. Surge en objetos que se han diseñado en cualquier forma. Conocemos la geometría, se ha empleado por siglos (Fig. 1.1). También en las ciencias puras, como la matemática y física, juega un papel importante. La descripción matemática de la geometría consiste en elementos lógicos de la geometría misma, por ejemplo en las construcciones geométricas para triángulos (Fig. 1.2). Esta clase de tratamiento lógico se remonta hasta los principios de la historia, que se asume alrededor del año 3500 A.de C., cuando aparecen los primeros documentos escritos en la Mesopotamia. Para épocas más remotas no poseemos semejantes legados, y debemos confiar en documentos pétreos como las pirámides de Egipto, las cuales probablemente sean mucho más antiguas que lo que se supone habitualmente. Se ha copiado en detalle la pirámide de Keops y se han hallado relaciones con la circunferencia de la Tierra, lo cual sugiere que la geometría ha tenido significativa importancia hasta en la Edad de Piedra. En aquella época tuvimos en Europa una floreciente cultura celta, de la cual sobreviven numerosas reliquias en piedra. Las runas empleadas por los druidas eran signos geométricos.

La filosofía antigua, en particular la filosofía natural, culminó en Grecia. Se considera a Pitágoras como el primer fundador de las matemáticas; todos conocemos el teorema de Pitágoras. En Atenas nació la democracia, y el "triumvirato" de Sócrates, Platón y Aristóteles fundó la filosofía clásica alrededor del año 400 A. de C., y de allí en adelante. Sus escuelas se mantuvieron vigentes durante alrededor de mil años. Euclides, quien escribió el fundamental tratado sobre razonamiento geométrico "Elementos" era miembro de la escuela platónica.

Durante el medioevo, el conocimiento heredado del Imperio Romano se transmitió a la posteridad a través de los monasterios cristianos, así como a través de los filósofos y matemáticos árabes. El Renacimiento, iniciado en la actual Italia en el siglo XIV, y extendido a Europa en los siglos XV y XVI, fue tanto un resurgimiento del conocimiento antiguo como de la filosofía natural empírica moderna, conectada a Galileo Galilei, desarrolló el método de las demostraciones experimentales, y Johan Kepler, que estableció nuestro moderno sistema heliocéntrico, presentado inicialmente como hipótesis por Nicolás Copérnico.

Desde el siglo XVII, la descripción matemática de la física progresó notablemente. Isaac Newton publicó la ley de la gravitación la cual, de hecho, se retrotrae a su mentor, Robert Hooke. Esto fue un gran avance en la filosofía natural, porque los eventos celestiales podían ahora predecirse matemáticamente, aun cuando esto se tornó completamente posible sólo desde el advenimiento de las computadoras. El siglo XVIII fue la época dorada de la mecánica, las leyes de Newton, y sus generalizaciones por parte de Lagrange y Hamilton abrieron el camino para

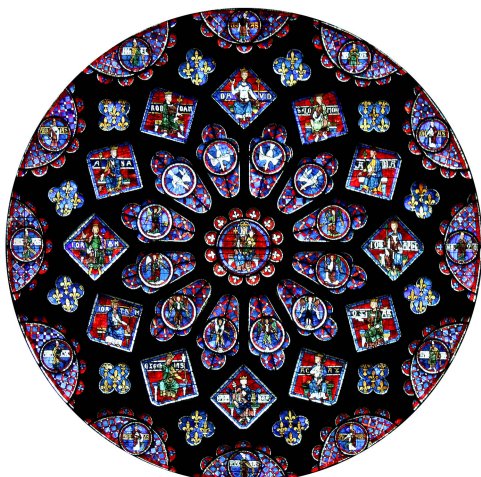


Figura 1.1: Ejemplo de geometría: rosetón en un vitral de la catedral de Chartres.

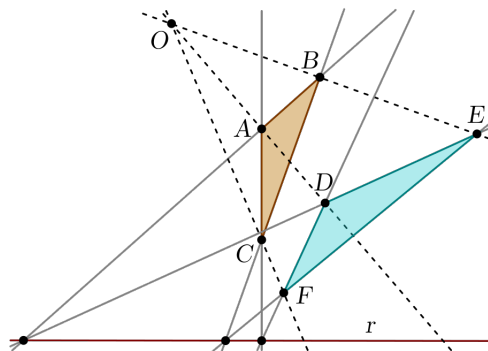


Figura 1.2: Ejemplo de geometría: triángulos.

la física matemática durante los siguientes trescientos años. La geometría se utilizó inicialmente para la descripción de los cuerpos y partículas. Con el surgimiento de la mecánica cuántica en el siglo XX, la geometría se extendió al reino atómico y subatómico. Por ejemplo, los átomos que conforman sólidos y moléculas exhiben una estructura geométrica (Fig. 1.3) que resulta esencial para sus propiedades macroscópicas. Argumentos similares funcionan en el caso de la electrodinámica (ver, p. ej., la Fig. 1.4). Las líneas de fuerza de Faraday describen un efecto a corta distancia, que fue la base para la descripción geométrica de la electrodinámica, y que culminó en las ecuaciones de Maxwell.

El empleo de la geometría cambió nuevamente a principios del siglo XX, cuando Einstein introdujo su teoría de la relatividad general. Basó su física en una geometría no euclidiana. La gravitación ya no se describía mediante un campo impuesto externamente sobre el espacio y el tiempo, sino que el "espaciotiempo" mismo se consideró como objeto de descripción, y se alteraba de tal manera que los cuerpos se moviesen sobre una línea virtualmente recta (una geodésica) a través del espacio. Se consideraba al espaciotiempo como curvo, y su curvatura describía las leyes de la gravitación. Junto con esta interpretación, se desarrollaba a la geometría como un concepto abstracto, descrito mediante números y funciones matemáticas. Este enfoque se conoce como geometría analítica, y su forma más sencilla emplea sistemas de coordenadas y vectores.

El concepto geométrico de Einstein fue el primer cambio paradigmático en la física después de que Newton introdujo sus leyes de movimiento, 300 años antes. Las validaciones experimentales de la relatividad general de Einstein han sido escasas; meramente confinadas al Sistema Solar,

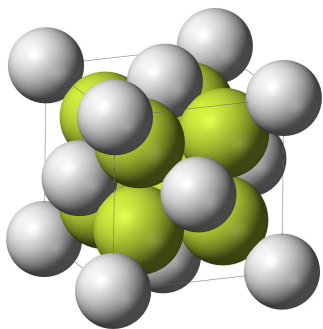


Figura 1.3: Ejemplo de geometría: celda unitaria de cristal de fluorita. Blanco: calcio, Verde: flúor.

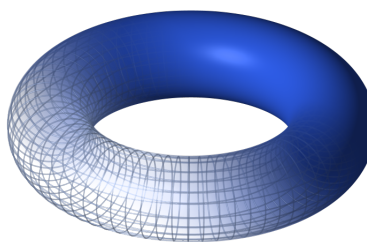


Figura 1.4: Ejemplo de geometría: toroide.

como en la desviación de la luz por el Sol y en la rotación del planeta Mercurio. A pesar de esta limitación, se tomó esta teoría como base para la cosmología, a partir de la cual luego se extrapoló la existencia del Big Bang y de la materia oscura.

Desafortunadamente, este enfoque hacia la cosmología ha introducido inconsistencias contradictorias. Por ejemplo, el concepto de que la velocidad de la luz es un límite superior absoluto se ha transformado en dogma en la física contemporánea, y como tal inmune a los argumentos racionales. Sin embargo, para explicar la primera fase expansiva del universo, uno debe de asumir que ello sucedió con una velocidad de expansión superior a la de la luz. Este ejemplo es sólo una de las críticas a Einstein que deben contestarse adecuada y científicamente.

Posteriormente, luego de la muerte de Einstein, los astrónomos observaron la así-llamada curva de velocidad de las galaxias. Esto significa que las estrellas en los brazos exteriores de las galaxias en espiral no se mueven según la ley de la gravitación de Newton, sino a una velocidad constante. Sin embargo, la relatividad general de Einstein tampoco logra explicar esta conducta. Ambas teorías (Einstein y Newton) se desbaratan para dimensiones cósmicas. Cuando una teoría no se ajusta a los datos experimentales, el método científico requiere que la teoría se mejore o se sustituya por un concepto mejor. En el caso de las curvas de velocidad galáctica, sin embargo, se "decidió" que Einstein estaba en lo correcto y que debe de existir otra razón por la que los astros se comportan así. Se postuló entonces la materia oscura, que interactúa a través de la gravedad y se distribuye de un modo tal que justifica las órbitas observadas. A pesar de una búsqueda intensa de materia oscura, aun a nivel sub-atómico, nada se halló que pudiese interactuar con la radiación electromagnética observable, como la luz. Aferrarse a la teoría de Einstein suena a locura, pero nadie en el mundo científico se ha atrevido a abandonarla.

Los miembros de AIAS, con Myron Evans a la cabeza, asumieron la tarea de desarrollar una nueva teoría de la física que superase los problemas de la relatividad general de Einstein. Poco después del año 2000, Myron Evans desarrolló la teoría de "Einstein Cartan Evans" (teoría ECE [1, 2, 3]) como reemplazo, e incluso logró unificar esto con la electrodinámica y la mecánica cuántica. Ello condujo a un progreso importante en varios campos de la física, y los aspectos más significativos se describen en este libro de texto.

La teoría ECE se basa íntegramente en geometría, al igual que la relatividad de Einstein. Por lo tanto, se incluyó el nombre de Einstein en este nuevo enfoque teórico. Ambas teorías adoptan la geometría del espaciotiempo (tres dimensiones espaciales, más una dimensión temporal) como su base. Mientras que Einstein pensó que la materia curva al espaciotiempo y asumió que la materia era una "fuente" de campos, veremos que la teoría ECE se basa íntegramente en el concepto de campo, sin introducir fuentes externas, las cuales crean dificultades en la de Einstein.

Otra razón para estas dificultades es que Einstein cometió un significativo error matemático en su teoría original (1905 a 1915), porque no estaba disponible toda la información necesaria. Riemann infirió la métrica en 1850, y Christoffel infirió la idea de la conexión en la década de 1860. La idea de la curvatura se infirió a principios del siglo XX, por Levi-Civita, Ricci, Bianchi y colegas en Pisa. Pero la torsión no se infirió sino hasta la década de 1920, por Cartan y sus colegas en París.

Por lo tanto, en 1915, cuando Einstein publicó sus ecuaciones de campo, la geometría de Riemann sólo contenía la curvatura, y no hubo forma de determinar que la conexión de Christoffel debía de ser antisimétrica, o al menos asimétrica. La decisión arbitraria de emplear la conexión simétrica devino un axioma, y las inferencias de la teoría de Einstein acabaron como basadas en una geometría incorrecta. La omisión de la torsión conduce a muchos problemas, como lo ha demostrado el equipo de AIAS, con gran detalle [4].

La torsión es un retorcimiento del espaciotiempo, que resulta esencial e inextricablemente vinculado a la curvatura, porque si la torsión es igual a cero entonces la curvatura desaparece [4]. De

hecho, la torsión es incluso más importante que la curvatura, porque las leyes unificadas de la gravitación y electrodinámica son básicamente interpretaciones físicas del retorcimiento, descrito formalmente mediante el tensor de torsión.

La teoría ECE unifica la física, al deducirla íntegramente en forma directa y determinista de la geometría de Cartan, y lo hace sin el empleo de parámetros de ajuste. El espaciotiempo queda completamente especificado por la curvatura y la torsión, y la teoría ECE emplea estas cualidades fundamentales subyacentes para deducir toda la física a partir de la geometría diferencial, así como para predecir efectos cuánticos sin asumirlos (como postulados) desde el principio. Es la primera (y única) teoría de campo unificada covariante general, objetiva y causal.

Este libro primeramente introduce las matemáticas sobre las que se basa la teoría ECE, de manera tal que puedan explicarse sistemáticamente los fundamentos de la teoría. Los detalles matemáticos se mantienen a un mínimo, y se explican sólo en la medida de lo necesario para asegurar la comprensión de la geometría de Cartan subyacente. Esto permite la introducción de los axiomas y teoremas fundamentales de la teoría ECE de un modo sencillo y directo. Se muestra que las mismas ecuaciones se mantienen para la electrodinámica, la gravitación, la mecánica y la dinámica de fluidos, que colocan a toda la física clásica sobre un terreno en común. La física luego se extiende al nivel microscópico, al introducir la cuantización canónica y la geometría cuántica. La estadística cuántica empleada es clásicamente determinista. No hay necesidad de renormalización ni de electrodinámica cuántica. Todos los efectos conocidos, incluyendo la estructura del vacío, pueden explicarse a partir de los axiomas de la teoría ECE, que se basa en la geometría de Cartan. Esto constituye el gran avance que este libro de texto explicará y clarificará.



Primera Parte: Geometría

2	Matemática de la geometría de Cartan. .	13
2.1	Transformación de coordenadas	
2.2	Tensores	
2.3	Variedad base y espacio tangente	
2.4	Diferenciación	
2.5	Geometría de Cartan	
3	Teoremas fundamentales de la geometría de Cartan	53
3.1	Identidad de Cartan-Bianchi	
3.2	Identidad de Cartan-Evans	
3.3	Formas alternas de las identidades de Cartan-Bianchi y de Cartan-Evans	
3.4	Otras identidades	



2. Matemática de la geometría de Cartan

2.1 Transformaciones de coordenadas

Antes de tratar los fundamentos de la geometría no cartesiana y de Cartan en un nivel matemático, debemos conocer las bases de la geometría analítica.

2.1.1 Transformaciones de coordenadas en álgebra lineal

Iniciando el campo de la geometría, primero recapitularemos algunas bases del álgebra lineal. La geometría de Cartan es, en un sentido, una generalización de estos conceptos. Puntos en el espacio se describen con coordenadas, que son n-tuplas para un espacio vectorial n-dimensional. Los componentes de las tuplas son números y describen cómo se alcanza un punto en el espacio, colocando juntas partes (por ejemplo varas) en diferentes direcciones. Las direcciones se denominan vectores base. Para un espacio euclidiano tridimensional, tenemos los vectores base

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Un punto con coordenadas (X, Y, Z) se asigna a un vector

$$\mathbf{X} = X\mathbf{e}_1 + Y\mathbf{e}_2 + Z\mathbf{e}_3. \quad (2.2)$$

Existe libertad de elección de cualquier base en un espacio vectorial, rectangular o no, pero cuando se aplica análisis vectorial a un espacio vectorial, es conveniente tener una base rectangular. Los vectores base deben normalizarse, de manera que esto sea una base ortonormal. Una pregunta es qué sucede cuando se cambian los vectores base. La posición de los puntos en el espacio vectorial debería de ser independientes de la base, y esto es un requisito fundamental que encontraremos nuevamente en la geometría de Cartan. Las coordenadas cambiarán cuando cambia la base. Un importante capítulo del álgebra lineal trata acerca de la descripción matemática de esto. Tomando los vectores base anteriores \mathbf{e}_i , una nueva base \mathbf{e}_i' en un espacio vectorial n-dimensional

será una combinación lineal de la base original:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} \mathbf{e}_j \quad (2.3)$$

donde los coeficientes q_{ij} representan una matriz, la así-llamada matriz de transformación. La ecuación anterior, puede, entonces, expresarse como una ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_n \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

con

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}) \quad (2.5)$$

y los vectores unitarios ordenados formalmente en un vector columna. \mathbf{Q} debe de ser de rango n e invertible. En la Ec. (2.4) los vectores unitarios pueden expresarse con sus componentes como vectores fila. Denotando el componente j -ésimo del vector unitario \mathbf{e}_i como $(e_i)_j = e_{ij}$, podemos entonces establecer una matriz con los vectores unitarios y escribir (2.4) en la forma

$$\begin{pmatrix} e'_{11} & \dots & e'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ e'_{n1} & \dots & e'_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Entonces la transformación de bases es un producto matricial por \mathbf{Q} . La matriz para la transformación inversa se obtiene multiplicando (2.4) o (2.6) por la matriz inversa \mathbf{Q}^{-1} :

$$\begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n1} & \dots & e_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} e'_{11} & \dots & e'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ e'_{n1} & \dots & e'_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Multiplicando \mathbf{Q} por \mathbf{Q}^{-1} da la matriz unitaria, que se expresa por el símbolo de Kronecker:

$$\mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}). \quad (2.8)$$

■ **Ejemplo 2.1** La rotación de bases con un ángulo ϕ en un espacio vectorial bidimensional puede describirse mediante una matriz de rotación

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

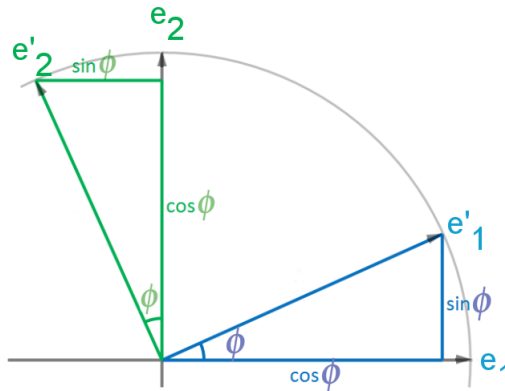
La base de vectores unitarios $(1, 0)$, $(0, 1)$ se transforma en los nuevos vectores base

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

esto significa

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Ambos conjuntos de bases se ilustran en la Fig. 2.1. ■

Figura 2.1: Rotación de vector base en un ángulo ϕ .

Luego de explicar la transformación de bases, buscamos hallar la ley de transformación de vectores. Los componentes de vectores en una base, las coordenadas, se transforman en los componentes en otra base. De la definición (2.2) puede expresarse un vector con coordenadas x_i como

$$\mathbf{X} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \quad (2.12)$$

y puede transformarse a una representación en otra base con coordenadas x'_i

$$\mathbf{X}' = \sum_i x'_i \mathbf{e}'_i. \quad (2.13)$$

Como el vector debe de permanecer igual en ambas bases, podemos establecer $\mathbf{X} = \mathbf{X}'$. Insertando las transformaciones de bases en esta relación, uno halla que la ley de transformación de coordenadas es

$$\mathbf{X}' = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{X} \quad (2.14)$$

o en coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Notamos el importante resultado de que las coordenadas se transforman con la matriz inversa comparada con los vectores base y vice versa.

■ Ejemplo 2.2 La matriz de transformación de coordenadas para la rotación bidimensional es

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Esto puede verse fácilmente porque la rotación inversa es de un ángulo $-\phi$. Entonces la función seno cambia de signo, más no así la función coseno. Los vectores en los ejes de la base se transforman a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

■

Comparando con (2.9), vemos que las columnas de la matriz de transformación \mathbf{Q} representan coordenadas de los *vectores* unitarios transformados, no las *bases*. En general:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

donde $x_{ij} = (x_i)_j$ denota el componente j del vector unitario transformado \mathbf{e}_i . Notar que el esquema de índices para x_{ij} está transpuesto en comparación con la definición matricial habitual.

2.1.2 Transformación general de coordenadas y diferenciales de coordenadas

En el marco de relatividad general, las transformaciones de coordenadas son mapeos para pasar de un espacio vectorial a otro. Estos mapeos son funciones multidimensionales. En la sección precedente, nos limitamos a transformaciones lineales (o mapeos) mientras que en relatividad general operamos con transformaciones no lineales. El espacio se describe, en matemática estricta, mediante una variedad de cuatro dimensiones. En este libro no desarrollamos estos conceptos en detalle, sino que sólo explicamos las partes requeridas para una comprensión básica. Los detalles matemáticos se explican en detalle en textos de relatividad general, (ver p.ej. [5]-[9]).

En este libro empleamos una coordenada temporal y tres coordenadas espaciales para relatividad general, con índices entre 0 y 3. Estos vectores se denominan 4-vectores. Las funciones y mapas (más adelante: los tensores) definidos en este espacio base son funciones de las coordenadas: $f(x_i)$, $i = 0, \dots, 3$. En particular, las transformaciones de coordenadas pueden describirse en esta forma. Consideremos dos sistemas de coordenadas, A y B, que describen el mismo espacio y se relacionan por una transformación no lineal. Sean X_i los componentes de un 4-vector \mathbf{X} en el espacio A y Y_i los componentes de un 4-vector \mathbf{Y} en el espacio B. La función de transformación $f: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ puede expresarse como dependencia funcional de los componentes:

$$Y_i = f_i(X_j) = Y_i(X_j) \quad (2.19)$$

para todos los componentes i de f y todos los pares i, j . Consideraremos a continuación las transformaciones entre un sistema rectangular, ortonormal de coordenadas, definido por vectores base $(1, 0, \dots)$, $(0, 1, \dots)$ etc. y las coordenadas

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

y un sistema de coordenadas curvilíneo con coordenadas

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Las funciones de transformación del sistema curvilíneo al cartesiano puede definirse mediante

$$X_i = X_i(u_j) \quad (2.22)$$

como se menciona arriba. Las transformaciones inversas definen las funciones de coordenadas de \mathbf{u} :

$$u_i = u_i(X_j). \quad (2.23)$$

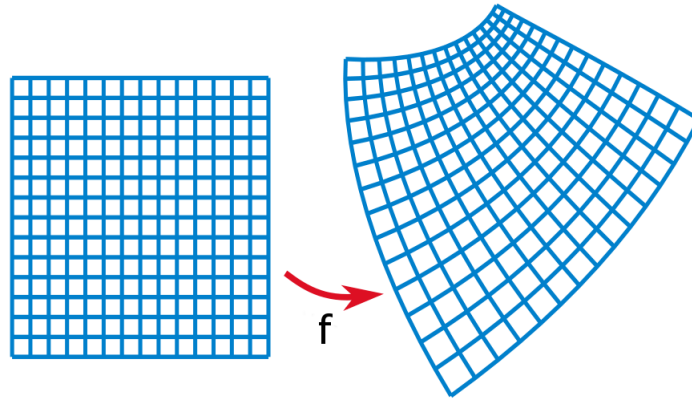


Figura 2.2: Transformación a coordenadas curvilíneas.

Las funciones $u_i = \text{constante}$ definen superficies de coordenadas, ver Fig. 2.2, por ejemplo.

El grado de cambio en cada dirección viene dado por el cambio en longitud de arco, y se expresa por los *factores de escala*

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_i} \right|. \quad (2.24)$$

Los vectores unitarios en el espacio curvilíneo se computan mediante

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial u_i}. \quad (2.25)$$

El *vector tangente* de las curvas de coordenadas en cada punto del espacio se define mediante

$$\nabla u_i = \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \mathbf{e}_j. \quad (2.26)$$

Requerimos que el sistema de coordenadas curvilíneo sea ortonormal en cada punto del espacio. Esto puede asegurarse por la condición de que los vectores tangentes de las coordenadas curvas en cada punto cumplan el requisito

$$\nabla u_i \cdot \nabla u_j = \delta_{ij}. \quad (2.27)$$

Los factores de escala pueden expresarse alternativamente por el módulo del vector tangente:

$$h_i = \frac{1}{|\nabla u_i|}. \quad (2.28)$$

■ **Ejemplo 2.3** Consideramos la transformación de coordenadas cartesianas a esféricas en un espacio euclidiano. Las coordenadas curvilíneas de un punto en el espacio son (r, θ, ϕ) , donde r es el radio, θ el ángulo polar y ϕ el ángulo azimutal, ver Fig. 2.3. Las coordenadas cartesianas son (X, Y, Z) . Las ecuaciones de transformación del sistema curvilíneo al rectangular son

$$\begin{aligned} X &= r \sin \theta \cos \phi \\ Y &= r \sin \theta \sin \phi \\ Z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.29)$$

y las transformaciones inversas son

$$\begin{aligned} u_r = r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ u_\theta = \theta &= \arccos \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \\ u_\phi = \phi &= \arctan \frac{Y}{X}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

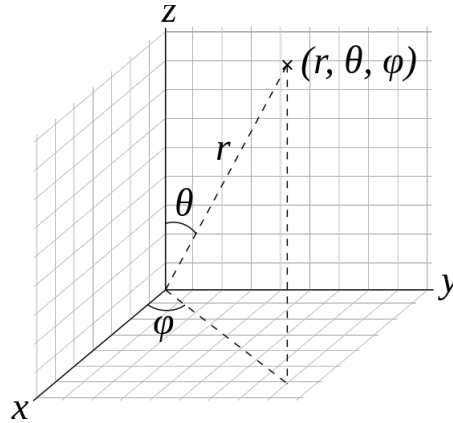


Figura 2.3: Coordenadas polares esféricas¹

El vector de factores de escala (2.24) es

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

y la matriz de vectores unitarios columna (2.25) es

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \phi \cos \theta & \sin \phi \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Los componentes de \mathbf{h} deben de ser positivos. La función seno puede tener valores positivos y negativos, pero en coordenadas esféricas el rango de θ es entre 0 y π , por lo tanto esta función es siempre positiva. ■

Como se explicó, los sistemas de coordenadas se eligen de modo tal que la longitud de los vectores se conserve. Esto también debe cumplirse para procesos temporales. Por ejemplo, un vector distancia que cambia con el tiempo es

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{v} \Delta t - \mathbf{X}_0 \quad (2.33)$$

donde \mathbf{v} es el vector velocidad de un punto de masa y \mathbf{X}_0 es una distancia inicial. La distancia al cuadrado es

$$s^2 = v^2 \Delta t^2 - (\mathbf{X}_0)^2. \quad (2.34)$$

Notamos que aparece un signo negativo frente a la parte espacial de s^2 . Esto es diferente de un 3-espacio euclidiano puramente "estático", donde tenemos

$$s_E^2 = X^2 + Y^2 + Z^2. \quad (2.35)$$

¹Fuente: Wikimedia Commons - https://commons.wikimedia.org/wiki/File:3D_Spherical.svg#/media/File:3D_Spherical.svg

Ahora generalizamos la Ec.(2.34). Cuando las diferencias en tiempo y espacio entre dos puntos son infinitésimamente diferentes, podemos expresar la distancia entre estos puntos con coordenadas diferenciales:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dX^2 - dY^2 - dZ^2 \quad (2.36)$$

donde ds es el elemento lineal diferencial. Hemos agregado un factor c a la coordenada temporal t de manera que todas las coordenadas tengan la dimensión física de longitud. De la misma manera podemos expresar el elemento lineal en otro sistema, digamos las coordenadas u :

$$ds^2 = (du_0)^2 - (du_1)^2 - (du_2)^2 - (du_3)^2. \quad (2.37)$$

Hasta el momento hemos tratado con un 3-espacio euclidiano, aumentado por un componente temporal. En forma más general, las ecuaciones anteriores pueden expresarse en la forma

$$ds^2 = \sum_{ij} \eta_{ij} dx_i dx_j \quad (2.38)$$

donde η_{ij} representa una matriz de coeficientes constantes que conduce directo a (2.36) o (2.37):

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Formalmente podemos expresar las coordenadas como un vector 4-columna

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} ct \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

donde μ va de 0 a 3 y se escribe como índice superior. Podemos hacer lo mismo para los diferenciales de coordenadas:

$$(dx^\mu) = \begin{pmatrix} c dt \\ dX^1 \\ dX^2 \\ dX^3 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

A esta altura debemos notar que el determinante de la matriz (2.39) es -1. La matriz η se denomina la *métrica* del espacio, en este caso del espacio euclidiano plano extendido en el tiempo, también llamado *espacio de Minkowski*. Obviamente, la métrica es definida negativa. Algunas veces se define η con signos inversos, pero el resultado es el mismo. Entramos aquí al territorio de la Relatividad Restringida. Necesitamos tratar con transformaciones de Lorentz en este texto. Dado que la métrica del espaciotiempo es una cantidad física esencial en la Relatividad General, al igual que en la teoría ECE, introducimos la Relatividad Restringida sólo desde el punto de vista de que el elemento lineal ds es independiente del sistema de coordenadas.

Posteriormente veremos que esto conduce al factor Gama de la Relatividad Restringida. Éste es el único formalismo en común entre la Relatividad de Einstein y la teoría ECE. Regresaremos a esto cuando se consideren situaciones físicas donde se producen altas velocidades. Esto requiere de un tratamiento relativista (en el sentido de la Relatividad Restringida).

2.1.3 Transformaciones en espacios curvos

Hasta ahora hemos llevado a cabo álgebra lineal en espacios euclidianos. Ahora extenderemos los conceptos de la sección precedente a espacios curvos. Esto significa que valores de coordenadas equidistantes no describen elementos de igual longitud. Pero vale la advertencia de que el emplear estos sistemas de coordenadas no significa que el espacio sea "curvo" en modo alguno. De acuerdo con el Ejemplo 2.1 de la sección anterior, un sistema de coordenadas curvilíneo puede describir perfectamente un espacio "plano" euclidiano. A continuación, consideramos dos sistemas de coordenadas en el mismo espacio, denotados como diferencial con primado y no primado, dx y dx' . Según las Ecs. (2.22, 2.23) tenemos dependencia funcional entre ambas coordenadas:

$$x^\mu = x^\mu(x'^\nu) \quad (2.42)$$

y

$$x'^\nu = x'^\nu(x^\mu). \quad (2.43)$$

Diferenciando estas ecuaciones da, inmediatamente

$$dx'^\mu = \sum_\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu, \quad (2.44)$$

$$dx^\mu = \sum_\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu. \quad (2.45)$$

Para hacer estas ecuaciones similares a las transformaciones en álgebra lineal (ver sección 2.2.2), definimos matrices de transformación

$$\alpha_\nu^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}, \quad (2.46)$$

$$\bar{\alpha}_\nu^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (2.47)$$

de manera que cualquier vector V con componentes V^μ en un sistema de coordenadas puede transformarse a un vector V' en el otro sistema de coordenadas mediante

$$V'^\mu = \alpha_\nu^\mu V^\nu, \quad (2.48)$$

$$V^\mu = \bar{\alpha}_\nu^\mu V'^\nu. \quad (2.49)$$

Estas matrices, sin embargo, no son elementos de álgebra lineal, sino funciones matriciales, porque no estamos trabajando con transformaciones lineales. La función $\bar{\alpha}$ es matriz inversa de α y vice versa. Esto significa:

$$\sum_\rho \alpha_\rho^\mu \bar{\alpha}_\nu^\rho = \delta_\nu^\mu \quad (2.50)$$

con la delta de Kronecker

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}. \quad (2.51)$$

Aquí hemos escrito α voluntariamente con un índice superior y uno inferior. Esto nos permite introducir la *convención de sumatoria de Einstein*: si el mismo índice aparece como índice superior e inferior de un mismo lado de una ecuación, se suma sobre este índice. Tal índice también se denomina *índice ficticio*. Utilizaremos con frecuencia esta característica cuando se

introduzcan los tensores más adelante. Con esta convención, que emplearemos sin aviso en el futuro, podemos escribir:

$$\alpha_p^\mu \bar{\alpha}_\nu^\rho = \delta_\nu^\mu. \quad (2.52)$$

Dado que el espacio no es necesariamente plano, los coeficientes de la métrica de (2.39) no son constantes, y pueden surgir elementos no diagonales. Esta métrica general se denomina, por convención, $g_{\mu\nu}$ y se define mediante el elemento lineal como antes:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.53)$$

Para un espacio plano con coordenadas cartesianas tenemos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}. \quad (2.54)$$

■ Ejemplo 2.4 Computamos un ejemplo para una matriz de transformación. Tomando el ejemplo 2.3 de transformación entre coordenadas cartesianas y coordenadas esféricas polares, tenemos, por (2.29), (2.30):

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin \theta \cos \phi \\ x^2 &= r \sin \theta \sin \phi \\ x^3 &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.55)$$

y las transformaciones inversas

$$\begin{aligned} x'^1 &= r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \\ x'^2 &= \theta = \arccos \frac{x^3}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}} \\ x'^3 &= \phi = \arctan \frac{x^2}{x^1}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

La matriz de transformación es, según (2.46):

$$\alpha_1^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} = \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \cos \phi) = \sin \theta \cos \phi \quad (2.57)$$

$$\alpha_2^1 = \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cos \phi) = r \cos \theta \cos \phi$$

etc. ...

resultando en una matriz de 3 x 3

$$\alpha = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Obviamente, esta matriz no es simétrica, e incluso tiene un cero en la diagonal principal. Aun así es de rango 3 y es invertible, como puede verificarse. Omitimos los detalles aquí, ya que la matriz inversa es un poco complicada. El determinante de α es $r^2 \sin \theta$, el determinante de $\bar{\alpha}$, la matriz inversa, es $1/(r^2 \sin \theta)$. Por inserción uno puede verificar que

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = \mathbf{1}. \quad (2.59)$$

El ejemplo está disponible como código para el sistema de álgebra computacional Maxima [23]. ■

■ Ejemplo 2.5 Como ejemplo adicional, computaremos la métrica de la transformación de coordenadas del ejemplo previo (2.4), ver código [24]. Hasta ahora no tenemos un método formal para esto. La forma más sencilla para espacios euclidianos es el método original de Gauss. Si la métrica \mathbf{g} (una matriz) se conoce para un sistema de coordenadas x^μ , el elemento lineal invariante de una superficie (que es hipotético en este caso) viene dado por

$$ds^2 = [dx^1 dx^2 dx^3] \mathbf{g} \begin{bmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

La matriz de la métrica de otro sistema de coordenadas x'^μ es computable por

$$\mathbf{g}' = \mathbf{J}^T \mathbf{g} \mathbf{J} \quad (2.61)$$

donde \mathbf{J} es el jacobiano de la transformación de coordenadas:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x'^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x'^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Comparando esto con la Ec.(2.57), vemos que la matriz de transformación α es idéntica al jacobiano, de manera que podemos también escribir:

$$\mathbf{g}' = \alpha^T \mathbf{g} \alpha. \quad (2.63)$$

La métrica de las coordenadas cartesianas es simplemente

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

y puede insertarse en (2.63), junto con α del ejemplo precedente. El resultado es

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

para la métrica de coordenadas esféricas. Escrito como el elemento lineal es

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.66)$$

La métrica es simétrica en general y diagonal en la mayoría de los casos. Aprenderemos otros métodos de determinar la métrica en espacios curvos a lo largo de este libro. ■

2.2 Tensores

Luego de explicar transformaciones de coordenadas y su representación matricial, incluyendo la métrica en cierta medida, extenderemos este formalismo desde los vectores a los tensores. En primer lugar, debemos definir qué es un tensor. Luego veremos cómo se transforman.

En la sección 1.1.3 introdujimos un formalismo de escribir matrices y vectores con cantidades indexadas, con índices superiores o inferiores, eligiendo esta posición en forma algo arbitraria, por ejemplo para cumplir la convención de sumatoria de Einstein. Introduzcamos ahora objetos k -dimensionales (con k variando entre 0 y cualquier número entero), con índices superiores e inferiores de la forma

$$T^{\mu_1 \dots \mu_n}{}_{\nu_1 \dots \nu_m}. \quad (2.67)$$

T tiene n supra-índices μ_i y m sub-índices ν_i con $n+m=k$. No se requiere que todos los supra-índices aparezcan primero, por ejemplo

$$T_1^{3\ 30} \quad (2.68)$$

es un objeto válido. Los índices μ_i, ν_i representan los índices para cada dimensión, yendo de 0 a $k-1$ por definición. En el ejemplo de más arriba, tenemos $k=4$, de manera que

$$T_5^{3\ 40} \quad (2.69)$$

no sería un objeto válido. Para $k=2$ semejante objeto representa una matriz, para $k=1$ un vector y para $k=0$ (sin índice) un valor escalar. Un tensor se define mediante objetos de tipo (2.67) que adhieren a cierta conducta de transformación de los supra- y sub-índices. Dada una transformación de coordenadas α_p^μ entre dos sistemas de coordenadas, esta transformación debe aplicarse separadamente para cada índice de un tensor. Por ejemplo, un tensor T bidimensional puede transformarse a T' mediante

$$T'^{\mu\nu} = \alpha_p^\mu \alpha_\lambda^\nu T^{\rho\lambda}. \quad (2.70)$$

Además, requerimos, para sub-índices, utilizar las matrices de transformación inversa:

$$T'_{\mu\nu} = \alpha^\rho_\mu \alpha^\lambda_\nu T_{\rho\lambda} \quad (2.71)$$

y, en consecuencia, para casos mixtos:

$$T'^{\mu}_\nu = \alpha_p^\mu \alpha^\lambda_\nu T^{\rho\lambda}. \quad (2.72)$$

Nótese que las matrices α están definidas mediante las diferenciales de la transformación, ver las Ecs. (2.44) y (2.45).

En la sección 2.1.1 vimos que, si α_p^μ transforma los vectores base, entonces la matriz inversa α_λ^ν transforma las coordenadas de los vectores. Por lo tanto, los supra-índices de tensores transforman como coordenadas, mientras que los sub-índices transforman como las bases. Los supra-índices también se llaman *índices covariantes*, mientras que los sub-índices se llaman *índices contravariantes*. Un tensor que contiene ambos tipos de índices se llama un tensor de *índices mixtos*.

Concluimos esta sección con la sugerencia de que también la métrica introducida en la sección previa es un tensor. Matemáticamente más preciso sería restringir entonces a los tensores a vivir en espacios métricos, pero no nos preocuparemos demasiado con detalles matemáticos en este libro. La métrica $g_{\mu\nu}$ en espacios curvos es una matriz simétrica y un tensor de dimensión 2. El producto interior de dos vectores v, w puede expresarse con ayuda de la métrica:

$$s = g_{\mu\nu} v^\mu w^\nu \quad (2.73)$$

En un espacio euclidiano con coordenadas cartesianas, g es la matriz unitaria, tal como se demostró en el Ejemplo (2.5). Los índices de tensores arbitrarios pueden moverse hacia arriba o hacia abajo mediante las relaciones

$$T^{\mu}_\nu = g_{\nu\rho} T^{\mu\rho} \quad (2.74)$$

y

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} T_{\rho\nu} \quad (2.75)$$

donde $g^{\mu\rho}$ es la métrica inversa.

$$g^{\mu\rho} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\nu. \quad (2.76)$$

■ Ejemplo 2.6 Presentaremos algunas clases de operaciones con tensores. Los tensores pueden multiplicarse. Entonces el producto tiene el conjunto unión de índices, por ejemplo

$$A^{\mu\nu} B_{\rho} = C^{\mu\nu}_{\rho} . \quad (2.77)$$

El orden de multiplicación de A y B juega un papel, por lo que tal producto sólo tiene sentido para tensores con cierta simetría, por ejemplo el producto tensorial de dos vectores:

$$v^{\mu} w^{\nu} = C^{\mu\nu} . \quad (2.78)$$

Aquí, C es un tensor simétrico, es decir

$$C^{\mu\nu} = C^{\nu\mu} . \quad (2.79)$$

Sólo pueden sumarse tensores del mismo rango:

$$A^{\mu}_{\nu} + B^{\rho}_{\sigma} = C^{\alpha}_{\beta} . \quad (2.80)$$

La ecuación

$$A^{\mu}_{\nu} + B^{\rho\sigma}_{\tau} =? C^{\alpha\beta}_{\tau} \quad (2.81)$$

no es compatible con la definición de tensores, y por ende es errónea. Para más ejemplos, ver [5]. ■

2.3 Variedad base y espacio tangente

Luego de pasar revista al formalismo de tensores, consideraremos los espacios en los que operan estos tensores. Un tensor puede considerarse como una función, por ejemplo

$$T^{\mu}_{\nu} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (2.82)$$

que mapea un 4-vector a un campo tensorial bidimensional:

$$[ct, X, Y, Z] \rightarrow T^{\mu}_{\nu} (ct, X, Y, Z) \quad (2.83)$$

donde los dos índices del tensor indican que el mapa imagen es bidimensional. Hablamos de un "campo tensorial" en casos en donde se mapea un rango de argumentos continuo a un rango de imagen continuo, diferente del conjunto de argumentos. Por ejemplo, T pudiera ser un campo electromagnético que está definido en cada punto del 4-espacio. Si el conjunto de argumentos no es euclideo, requerimos que, en cada punto del conjunto de argumentos, exista un entorno local que sea un homomorfismo de un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , donde n es la dimensión del conjunto de argumentos. Esto se denomina entonces una variedad, o *manifold*. Aplicando múltiples funciones tensoriales a una variedad significa que existen varios *mapas* de la variedad. Se requiere además que la variedad sea diferenciable, porque más adelante vamos a querer aplicar cálculo diferencial. Supongamos que un punto P se ubica dentro del rango local válido de dos sistemas de coordenadas diferentes. Entonces la variedad es diferenciable en P , si el jacobiano de la transformación entre ambos sistemas de coordenadas es de rango n , la dimensión de la variedad. Para la definición de productos escalares, longitudes, ángulos y volúmenes, necesitamos una estructura métrica para "realizar mediciones". Para esto se requiere de la existencia de un tensor métrico. Una variedad diferenciable con un tensor métrico se denomina *variedad riemanniana*.

■ Ejemplo 2.7 En la Fig. 2.4, se da un ejemplo de una variedad bidimensional: la superficie de la Tierra. La geometría es no-euclidiana. Para grandes triángulos de la superficie terrestre, la suma de los ángulos es diferente de 180° . Una pequeña región se mapea a una superficie plana donde se restablece la geometría euclidiana. Esto puede hacerse para cada punto de una variedad dentro de cierto entorno, pero no globalmente para toda la variedad. ■

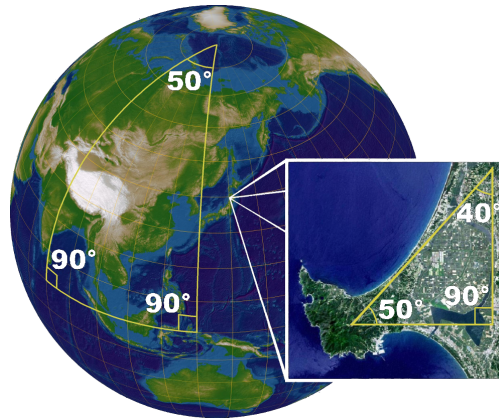


Figura 2.4: Variedad bi-dimensional y mapeo de una sección a un segmento plano.

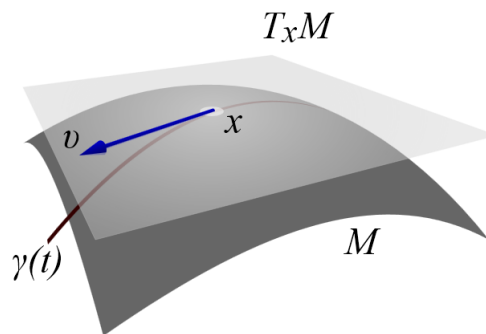


Figura 2.5: Vector tangente v a una variedad bi-dimensional M .

En cada punto de semejante variedad puede definirse un *espacio tangente*. Este es un espacio plano \mathbb{R}^n con la misma dimensión que la variedad. En la Fig. 2.5 se describe un ejemplo de una variedad bi-dimensional y un espacio tangente. La variedad se denota como M y el espacio tangente en el punto x como $T_x M$. Dicho espacio tangente (un plano) por ejemplo, ocurre para el movimiento o puntos de masa a lo largo de una curva orbital $\gamma(t)$. La variedad puede estar cubierta de puntos con entornos locales y espacios tangentes correspondientes en cada punto. El conjunto de todos los espacios tangentes se llama *manejo tangente*. Cambiando los sistemas de coordenadas en la variedad significa que el mapeo desde la variedad al espacio tangente debe redefinirse. Un producto escalar puede definirse en el espacio tangente mediante el empleo de la métrica de la variedad.

Ahora queremos hacer que la definición del espacio tangente sea independiente de la selección de coordenadas. El espacio tangente $T_x M$ en el punto x en la variedad puede identificarse con el espacio de operadores de derivadas direccionales a lo largo de curvas que pasan por x . Las derivadas parciales $\partial/\partial x_\mu = \partial_\mu$ representan una base adecuada para el espacio vectorial de derivadas direccionales, que podemos identificar sin dudas con el espacio tangente. Consideremos dos variedades, M y N , y una función $F : M \rightarrow N$ para un mapeo de puntos de M a puntos en N . En M y N no se define diferenciación. Sin embargo, podemos definir cuadros de coordenadas desde las variedades a sus correspondientes espacios tangentes. Estas son las funciones denotadas como ϕ y ψ en la Fig. 2.6. Los cuadros de coordenadas nos permiten construir un mapa entre ambos espacios tangentes:

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n. \tag{2.84}$$

Con ayuda de esta construcción podemos definir una derivada parcial de f que aproveche esta

via indirecta de los espacios tangentes. Para un punto x^μ en \mathbb{R}^m (el punto de x en M) definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} := \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x^\mu). \quad (2.85)$$

En muchos casos de aplicación tenemos una curva en la variedad M descrita por un parámetro λ . Podría ser el movimiento de una masa puntual en función del tiempo. Igual que más arriba, definimos la derivada de la función f según λ mediante la regla de la cadena:

$$\frac{df}{d\lambda} := \frac{dx^\mu}{d\lambda} \partial_\mu f. \quad (2.86)$$

Como se ve, hay una sumatoria sobre el índice μ , y ∂_μ puede considerarse como una base del espacio tangente. Los textos de matemáticas a veces aplican esto (por ejemplo [10]).

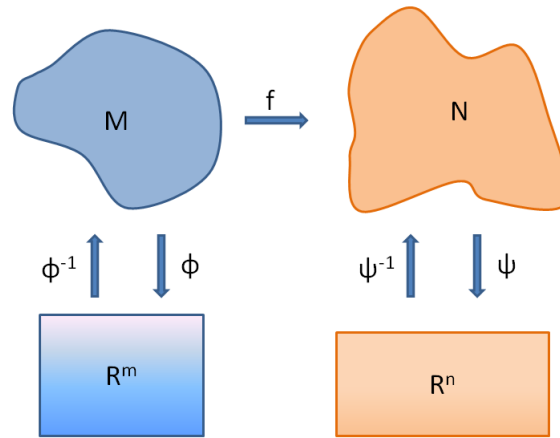


Figura 2.6: Mapeo entre dos variedades y espacios tangentes.

n-formas

Hay una clase especial de tensores, llamados *n-formas*. Éstos comprenden todos los tensores covariantes completamente anti-simétricos. En un espacio n-dimensional, hay 0-formas, 1-formas, ..., n-formas. Todas las formas mayores son cero por el requisito de antisimetría. Una 2-forma F puede construirse, por ejemplo, mediante dos 1-formas (co-vectores) a y b :

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu). \quad (2.87)$$

Mediante elevación de índices, esto puede re-expresarse a la forma

$$F'^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(a'^\mu b'^\nu - a'^\nu b'^\mu) \quad (2.88)$$

con

$$a'^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu, \text{ etc.} \quad (2.89)$$

Con un corchete para una permutación de índice antisimétrico

$$[\mu\nu] = \mu\nu - \nu\mu \quad (2.90)$$

podemos expresar esto en la forma

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}a_{[\mu} b_{\nu]}. \quad (2.91)$$

2.3 Variedad base y espacio tangente

En general podemos definir

$$T_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n]} = \frac{1}{n!} (T_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} + \text{suma alternante con permutaciones de } \mu_1 \dots \mu_n). \quad (2.92)$$

El tensor antisimétrico puede contener más índices que no se permutan.

■ **Ejemplo 2.8** Considerar un tensor $T_{\mu\nu\rho\sigma}{}^\tau$ que es antisimétrico en sus primeros tres índices.

Entonces tenemos

$$T_{[\mu\nu\rho]\sigma}{}^\tau = \frac{1}{6} (T_{\mu\nu\rho\sigma}{}^\tau - T_{\rho\mu\nu\sigma}{}^\tau + T_{\rho\nu\mu\sigma}{}^\tau - T_{\nu\mu\rho\sigma}{}^\tau + T_{\nu\rho\mu\sigma}{}^\tau - T_{\rho\nu\mu\sigma}{}^\tau). \quad (2.93)$$

Utilizando la antisimetría de los dos primeros índices, podemos simplificar esta expresión a

$$\begin{aligned} T_{[\mu\nu\rho]\sigma}{}^\tau &= \frac{1}{6} \left(T_{\mu\nu\rho\sigma}{}^\tau - (-T_{\mu\nu\rho\sigma}{}^\tau) + T_{\rho\mu\nu\sigma}{}^\tau - (-T_{\rho\mu\nu\sigma}{}^\tau) + T_{\nu\rho\mu\sigma}{}^\tau - (-T_{\nu\rho\mu\sigma}{}^\tau) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(T_{\mu\nu\rho\sigma}{}^\tau + T_{\rho\mu\nu\sigma}{}^\tau + T_{\nu\rho\mu\sigma}{}^\tau \right). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Esta es la suma de los índices μ, ν, ρ permutados cíclicamente. ■

Con ayuda de la antisimetrización podemos definir el *producto exterior* ó *producto cuña*. Dada una p-forma a y una q-forma b , definimos el producto antisimétrico por el operador \wedge (*cuña*):

$$(a \wedge b)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} := \frac{(p+q)!}{p!q!} a_{[\mu_1 \dots \mu_p} b_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}]}. \quad (2.95)$$

Por ejemplo, el producto cuña de dos 1-formas es

$$(a \wedge b)_{\mu\nu} = 2a_{[\mu} b_{\nu]} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu. \quad (2.96)$$

El producto cuña es asociativo:

$$(a \wedge (b + c))_{\mu\nu} = (a \wedge b)_{\mu\nu} + (a \wedge c)_{\mu\nu}. \quad (2.97)$$

Los matemáticos gustan de omitir los índices si resulta claro que una ecuación se expresa para formas. Así, la última ecuación también puede expresarse como

$$a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c \quad (2.98)$$

en una notación abreviada. Otra propiedad es que los productos cuña no son conmutativos. Para una p-forma a y una q-forma b es

$$a \wedge b = (-1)^{pq} b \wedge a \quad (2.99)$$

y para una 1-forma:

$$a \wedge a = 0. \quad (2.100)$$

Estas características justificarían el nombre “producto exterior” como generalización de un producto vectorial en tres dimensiones.

Una operación importante en formas es aplicar el *dual de Hodge*. Primero definimos el símbolo de Levi-Civita en n dimensiones:

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_1 \dots \mu_n \text{ es permutación par de } 0, \dots, (n-1), \\ -1 & \text{si } \mu_1 \dots \mu_n \text{ es permutación impar de } 0, \dots, (n-1), \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases} \quad (2.101)$$

El determinante de una matriz puede expresarse con este símbolo. Si $M_{\mu'}^{\mu}$ es una matriz $n \times n$, el determinante $|M|$ cumple la relación

$$\varepsilon_{\mu'_1 \dots \mu'_n} |M| = \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} M_{\mu'_1}^{\mu_1} \dots M_{\mu'_n}^{\mu_n} \quad (2.102)$$

o restringiendo a una permutación del lado izquierdo:

$$|M| = \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} M_1^{\mu_1} \dots M_n^{\mu_n}. \quad (2.103)$$

El símbolo de Levi-Civita está definido en cualquier sistema de coordenadas de la misma manera, sin sufrir una transformación de coordenadas. O sea que no es un tensor. El símbolo es totalmente antisimétrico, o sea que cuando dos índices se intercambian, el signo cambia. Todos los elementos donde un índice aparece dos veces son cero, porque el conjunto de índices debe ser una permutación.

El símbolo de Levi-Civita también puede definirse con supra-índices de la misma forma. Entonces el determinante (2.102/2.103) adopta la forma

$$\varepsilon^{\mu'_1 \dots \mu'_n} |M| = \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} M_{\mu_1}^{\mu'_1} \dots M_{\mu_n}^{\mu'_n} \quad (2.104)$$

o

$$|M| = \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} M_{\mu_1}^1 \dots M_{\mu_n}^n. \quad (2.105)$$

Podemos construir un tensor a partir del símbolo de Levi-Civita, multiplicándolo por la raíz del módulo de la métrica (en el espacio Minkowski la métrica es negativa definida, por lo que debemos de tomar el módulo). Comenzamos con la ecuación de transformación del tensor de la métrica

$$g_{\mu' \nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu \nu} \quad (2.106)$$

y aplicamos el determinante. Con la regla del producto de determinantes, esto queda

$$|g_{\mu' \nu'}| = \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right| \left| \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \right| |g_{\mu \nu}| = \left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right|^2 |g_{\mu \nu}| \quad (2.107)$$

o

$$\left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right| = \sqrt{\frac{|g_{\mu' \nu'}|}{|g_{\mu \nu}|}} \quad (2.108)$$

donde el lado izquierdo representa el determinante del Jacobiano. Usando el caso especial

$$M_{\mu'}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \quad (2.109)$$

e insertando esto en (2.104) se obtiene

$$\varepsilon^{\mu'_1 \dots \mu'_n} \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right| = \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_n}}{\partial x^{\mu_n}}. \quad (2.110)$$

El determinante del Jacobiano inverso es

$$\left| \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \right| = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right|^{-1}, \quad (2.111)$$

por lo tanto, obtenemos a partir de (2.110) insertando (2.108):

$$\varepsilon^{\mu'_1 \dots \mu'_n} \frac{1}{\sqrt{|g_{\mu' \nu'}|}} = \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_n}}{\partial x^{\mu_n}} \frac{1}{\sqrt{|g_{\mu \nu}|}}. \quad (2.112)$$

Así, $\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} / \sqrt{|g|}$ se transforma como tensor y por lo tanto es por definición un tensor. El tensor covariante se transforma como

$$\varepsilon_{\mu'_1 \dots \mu'_n} \sqrt{|g_{\mu' \nu'}|} = \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}} \sqrt{|g_{\mu \nu}|}. \quad (2.113)$$

Los índices pueden subirse y bajarse como es costumbre multiplicando con elementos métricos.

Con esta conducta del símbolo de Levi-Civita en mente, definimos el Dual de Hodge de una forma tensorial como sigue. Suponer una variedad n -dimensional, una sub-variedad p -dimensional, $p < n$, y una p -forma tensorial A . Definimos entonces

$$\tilde{A}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} := \frac{1}{p!} |g|^{-1/2} \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_p} A_{\nu_1 \dots \nu_p}. \quad (2.114)$$

El tilde supraíndice $\tilde{}$ se llama el *operador del dual de Hodge*. En la literatura matemática esto se suele denotar con un asterisco como prefijo-operador ($*A$), pero preferimos el tilde. El dual de Hodge se expresa con el símbolo de Levi-Civita con sólo componentes covariantes con

$$\tilde{A}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} |g|^{-1/2} g^{\nu_1 \sigma_1} \dots g^{\nu_p \sigma_p} \varepsilon_{\sigma_1 \dots \sigma_p \mu_1 \dots \mu_{n-p}} A_{\nu_1 \dots \nu_p}. \quad (2.115)$$

En este libro usaremos una forma más sencilla, donde un tensor contravariante se transforma en tensor covariante y vice versa. Los factores $g^{\nu_1 \sigma_1}$ etc. pueden emplearse para subir los índices de $A_{\nu_1 \dots \nu_p}$:

$$\tilde{A}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} |g|^{-1/2} \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_p} A^{\nu_1 \dots \nu_p}, \quad (2.116)$$

$$\tilde{A}^{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} |g|^{1/2} \varepsilon^{\nu_1 \dots \nu_p} A_{\nu_1 \dots \nu_p} \quad (2.117)$$

donde el signo del exponente de $|g|$ se ha cambiado según (2.113). Como ejemplo, en un espacio 4-dimensional empleamos $n = 4$, $p = 2$. Los duales de Hodge de la forma A son, así

$$\tilde{A}_{\mu \nu} = \frac{1}{2} |g|^{-1/2} \varepsilon_{\mu \nu \sigma \rho} A^{\sigma \rho}, \quad (2.118)$$

$$\tilde{A}^{\mu \nu} = \frac{1}{2} |g|^{1/2} \varepsilon^{\mu \nu \sigma \rho} A_{\sigma \rho}. \quad (2.119)$$

El dual de Hodge \tilde{A} es linealmente independiente en la forma original A . Usaremos el dual de Hodge cuando deduzcamos los teoremas de Cartan y las ecuaciones de campo de la teoría ECE.

2.4 Diferenciación

Ya empleamos algunas formas de diferenciación en secciones precedentes, pero sólo en la forma "establecida" con espacios euclidianos. Ahora extenderemos esto a espacios curvos (variedades) y al cálculo de p -formas.

2.4.1 Diferenciación covariante

Hasta ahora, ya empleamos derivadas parciales de tensores y derivadas parametrizadas. Esto no resulta suficiente para definir un tipo general de derivada en espacios curvos de variedades. Derivadas parciales dependen del sistema de coordenadas. Necesitamos una derivada "covariante generalizada" que mantenga su forma bajo transformaciones de coordenadas y pase a la derivada parcial para espacios euclidianos.

Para retener linealidad, la derivada covariante debiera tener la forma de una derivada parcial más una transformación lineal. Ésta última corrige la derivada parcial de modo tal que se asegure la covariancia. La transformación lineal depende de los índices de las coordenadas. Definimos para la *derivada covariante* de un campo vectorial arbitrario V^ν :

$$D_\mu V^\nu := \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (2.120)$$

donde las $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ son funciones denominadas los *coeficientes de conexión* o *símbolos de Christoffel*. En contraste con una derivada parcial ordinaria, la derivada covariante de un componente vectorial V^ν depende de todos los otros componentes a través de la suma con los coeficientes de conexión (¡observar la convención de suma!). La derivada covariante debiera tener propiedades tensoriales, por lo que la Ec. (2.120) es una ecuación tensorial, que transduce un tensor (1,0) en un tensor (1,1), y podemos aplicar las reglas de transformación para tensores:

$$D_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} D_\mu V^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \right). \quad (2.121)$$

Por otro lado, podemos aplicar la transformación a la Ec. (2.120) directamente:

$$D_{\mu'} V^{\nu'} = \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} V^{\lambda'}. \quad (2.122)$$

Los términos individuales del lado derecho transforman como sigue:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu'} V^{\nu'} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} V^\nu \right) \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} V^\nu, \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} V^{\lambda'} = \Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda, \quad (2.124)$$

donde la regla del producto se ha aplicado al primer término. Las Ecs. (2.122) y (2.121) pueden igualarse. El término con la derivada parcial de $V^{\nu'}$ se cancela y obtenemos:

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} V^\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda. \quad (2.125)$$

Aquí reemplazamos el índice ficticio ν con λ en el término con la derivada parcial mixta. Esta es una operación común en las ecuaciones tensoriales. Otra operación habitual es multiplicar una ecuación tensorial por un término indexado y sumando sobre uno o más índices libres (o sea volviendo al índice previamente independiente en un índice ficticio). Multiplicando la última ecuación por $\partial x^\lambda / \partial x^{\lambda'}$ da

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} V^\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^{\lambda'}} V^\lambda \quad (2.126)$$

de manera que nos acercamos a determinar la transformación de los coeficientes de conexión. La última ecuación se cumple para todo vector V^λ , y la ecuación debe cumplirse para los coeficientes de V^λ directo. Así obtenemos la ecuación de transformación de los coeficientes de conexión:

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda}. \quad (2.127)$$

Obviamente los Gammas no transforman como tensor, el último término lo evita. Los Gammas no son un tensor, y los índices de Gama no pueden subirse o bajarse al multiplicar con elementos métricos y no es necesario poner mucho esfuerzo en mantener el orden de supra- y sub-índices. Hasta ahora investigamos derivadas covariantes de un vector contravariante (Ec. (2.120)). La teoría puede ampliarse a vectores covariantes de 1-formas ω_ν :

$$D_\mu \omega_\nu := \partial_\mu \omega_\nu + \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda \quad (2.128)$$

Donde $\bar{\Gamma}$ es un coeficiente de conexión que es a priori diferente de Γ . Puede demostrarse [5] que - por motivos de consistencia - $\bar{\Gamma}$ es igual que Γ excepto por el signo:

$$\bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda = -\Gamma_{\mu\nu}^\lambda. \quad (2.129)$$

Nótese que los índices de suma son diferentes entre (2.120) y (2.128). Teniendo ahora una derivada covariante para componentes contravariantes y covariantes, la derivada covariante para tensores arbitrarios (k, m) se define como sigue:

$$D_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_m} := \partial_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_m} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_m} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2} T^{\mu_1 \lambda \mu_3 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_m} + \dots \quad (2.130)$$

$$- \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_m} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \nu_3 \dots \nu_m} - \dots$$

Aplicando la derivada covariante, un tensor (k,m) se transforma en un tensor (k,m+1). También es posible sacar la derivada covariante de una función escalar. Como en este caso no hay índices definidos para la conexión, definimos, para una función escalar ϕ :

$$D_\mu \phi := \partial_\mu \phi. \quad (2.131)$$

Como ya se ha visto, los coeficientes de conexión no son un tensor. Sin embargo, es fácil volverlos un tensor tomando la suma antisimétrica de los sub-índices:

$$T^\lambda_{\mu\nu} := \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda. \quad (2.132)$$

Esto se denomina un *tensor de torsión*. Cuando se aplica la transformación (2.127) para la diferencia de Gammas, el último término desaparece porque el orden en la derivada parcial mixta es arbitraria. El tensor de torsión es antisimétrico por definición. En cuatro dimensiones puede expresarse, para cada índice λ , como

$$(T^\lambda_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & T^\lambda_{01} & T^\lambda_{02} & T^\lambda_{03} \\ -T^\lambda_{01} & 0 & T^\lambda_{12} & T^\lambda_{13} \\ -T^\lambda_{02} & -T^\lambda_{12} & 0 & T^\lambda_{23} \\ -T^\lambda_{03} & -T^\lambda_{13} & -T^\lambda_{23} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.133)$$

Hay seis componentes independientes por cada λ . Veremos después que éste es uno de los elementos básicos de la geometría de Cartan. Una conexión simétrica en sus sub-índices está libre de torsión.

Para completar, damos la definición del *tensor de curvatura de Riemann*, que también está definido por los coeficientes de conexión, pero de un modo más complicado.

$$R^\lambda_{\rho\mu\nu} := \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma. \quad (2.134)$$

El tensor es antisimétrico en sus dos últimos índices. Si se expresa en su forma pura covariante $R_{\lambda\rho\mu\nu} = g_{\tau\lambda} R^\tau_{\rho\mu\nu}$, y la variedad se halla libre de torsión, el tensor de Riemann también es antisimétrico en sus primeros dos índices. Esta propiedad, sin embargo, no se utilizará en la geometría de Cartan.

2.4.2 Compatibilidad métrica y transporte paralelo

Una propiedad fundamental de vectores en física es su independencia respecto de su representación en coordenadas. Del espacio euclidiano sabemos que una rotación de un vector deja su longitud y orientación constante respecto de otros vectores. En variedades curvas éste ya no es siempre el caso. Si se conserva o no la longitud de un vector depende del tensor de la métrica. En la Fig. 2.7 se ilustra el transporte paralelo de un vector. En una superficie esférica, se transporta en paralelo un vector desde el polo norte a un punto en el ecuador de dos maneras: 1) movido directamente a lo largo del meridiano (derecha; rojo) y 2) movido primero por otro meridiano y luego por una latitud ecuatorial (izquierda; azul). Obviamente, los resultados difieren, por lo que este procedimiento ingenioso no es compatible con una variedad esférica.

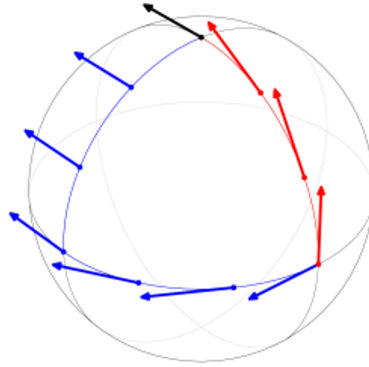


Figura 2.7: Transporte paralelo de un vector sobre una esfera.

Formalicemos el proceso para definir transporte paralelo de un modo compatible. Un sendero es el desplazamiento de un vector V^v con coordenadas parametrizadas, con un parámetro λ :

$$V^v = V^v(\lambda) \text{ en el punto } x^v(\lambda). \quad (2.135)$$

Esto puede considerarse como el mover el vector (que es un tensor) por un sendero predefinido. Definimos la derivada covariante a lo largo del sendero mediante

$$\frac{D}{d\lambda} := \frac{dx^\mu}{d\lambda} D_\mu, \quad (2.136)$$

donde $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ es el vector tangente al sendero. Esto da un método de especificar un *transporte paralelo* de V . Esta condición se cumple si la derivada covariante del sendero desaparece:

$$\frac{D V^v}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} D_\mu V^v = \frac{dx^\mu}{d\lambda} (\partial_\mu V^v + \Gamma_{\mu\rho}^v V^\rho) = 0. \quad (2.137)$$

Como el vector tangente no puede desaparecer (perderíamos el sendero en ese caso), resulta que la derivada covariante del tensor debe de desaparecer:

$$D_\mu V^v = 0. \quad (2.138)$$

Esta es la condición para transporte paralelo. Se cumple si y sólo si la derivada covariante en un sendero desaparece. Esto se cumple para todo tensor. En particular, podemos elegir el tensor de la métrica y requerirle que se transporte en paralelo:

$$D_\sigma g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.139)$$

Esto se llama *compatibilidad de la métrica*. Se dice también que la conexión es métricamente compatible porque está contenida en la derivada covariante. Significa que el tensor de la métrica es covariantemente constante en todos lados y puede transportarse en paralelo. Si se omite este requisito habría dificultades para definir la física en una variedad, por ejemplo las normas de vectores no serían constantes, y cambiarían durante traslaciones o rotaciones.

■ **Ejemplo 2.9** Mostramos que el producto interior de dos vectores se conserva si los mismos se transportan en paralelo. El producto interior de vectores V^μ y W^ν es $g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu$. Su derivada de sendero covariante es

$$\frac{D}{d\lambda} (g_{\mu\nu}V^\mu W^\nu) = \left(\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu}\right) V^\mu W^\nu + g_{\mu\nu} \left(\frac{D}{d\lambda} V^\mu\right) W^\nu + g_{\mu\nu} V^\mu \left(\frac{D}{d\lambda} W^\nu\right) = 0 \quad (2.140)$$

porque los tres tensores se transportan en paralelo por definición. De igual modo se puede probar que, si $g_{\mu\nu}$ se transporta en paralelo, también lo puede su inversa $g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{D}{d\lambda} (g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} g^{\rho\sigma}) \\ &= \frac{D}{d\lambda} (g_{\mu\sigma}) g_{\rho\nu} g^{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} \frac{D}{d\lambda} (g_{\rho\nu}) g^{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} \frac{D}{d\lambda} (g^{\rho\sigma}). \end{aligned} \quad (2.141)$$

Los primeros dos términos en la última línea desaparecen por definición, y en consecuencia el tercer término también debe desaparecer. ■

El concepto de transporte paralelo nos permite hallar la ecuación para geodésicas. Una *geodésica* es la generalización de una recta en espacio euclidiano. Los puntos de masa sin fuerzas externas se mueven así. En una variedad curva, el movimiento sigue la curva del espacio y, por ende, no es una recta. Se halla la ecuación de geodésica requiriendo que el sendero de transporte paralelo sea su propio vector tangente. Esto es en analogía al espacio plano, donde el vector tangente es paralelo a su vector lineal. A partir de (2.137) tenemos entonces

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (2.142)$$

que puede expresarse

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} D_\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \right) = 0 \quad (2.143)$$

y - por sustitución de $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ por $\frac{\partial \lambda}{\partial x^\mu} \frac{d}{d\lambda}$ - se simplifica a

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\rho}^\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \quad (2.144)$$

es la *ecuación de la geodésica*. En el espacio plano, las Gammas desaparecen, y se recupera la condición de la ley de Newton, $\ddot{x} = 0$ para un movimiento sin restricciones.

En un sendero en la variedad, pueden usarse derivadas covariantes para describir la desviación del tensor de transportarse en paralelo. Considerar un viaje redondo, descrito en la Fig. 2.8. Se mueve un tensor, en contra de reloj, por su vector tangente covariante D_μ , luego D_ν , y luego regresa a su punto inicial en sentido inverso. Si el tensor es transportable en paralelo, desaparecen todas las derivadas. Éste no es el caso general. El conmutador de dos derivadas covariantes se define como

$$[D_\mu, D_\nu] := D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu \quad (2.145)$$

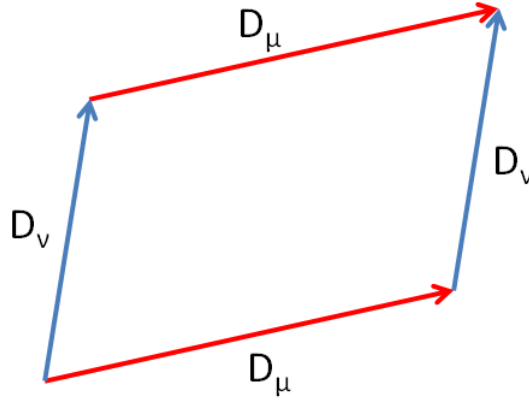


Figura 2.8: Circuito cerrado para la composición de dos derivadas covariantes.

y describe la diferencia de ambos senderos respecto de la derivada covariante. Podemos aplicar esto a un vector V^ρ y evaluar los términos:

$$\begin{aligned}
 [D_\mu, D_\nu]V^\rho &= D_\mu D_\nu V^\rho - D_\nu D_\mu V^\rho & (2.146) \\
 &= \partial_\mu (D_\nu V^\rho) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda D_\lambda V^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho D_\nu V^\sigma \\
 &\quad - \partial_\nu (D_\mu V^\rho) + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda D_\lambda V^\rho - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho D_\mu V^\sigma \\
 &= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) V^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda V^\rho - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\sigma \\
 &\quad + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V^\lambda \\
 &\quad - \partial_\nu \partial_\mu V^\rho - (\partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho) V^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda V^\rho + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\rho V^\sigma \\
 &\quad - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\rho \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma V^\lambda \\
 &= \left(\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \right) V^\sigma - (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) D_\lambda V^\rho.
 \end{aligned}$$

Comparando la última línea con las definiciones de tensor de curvatura (2.134) y tensor de torsión (2.132), puede expresarse:

$$[D_\mu, D_\nu]V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - T^\lambda_{\mu\nu} D_\lambda V^\rho. \quad (2.147)$$

Interesantemente, el conmutador de derivadas covariantes de un vector depende linealmente del vector mismo y de su vector tangente, donde los coeficientes son los tensores de curvatura y de torsión. En caso de no torsión, no habría de hecho dependencia respecto de una derivada de V^ρ en absoluto. La acción de $[D_\mu, D_\nu]$ puede aplicarse a un tensor de rango arbitrario. En general, es

$$\begin{aligned}
 [D_\rho, D_\sigma]X^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_m} &= R^{\mu_1}_{\lambda\rho\sigma} X^{\lambda\mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_m} + R^{\mu_2}_{\lambda\rho\sigma} X^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_m} + \dots & (2.148) \\
 &\quad - R^\lambda_{\nu_1\rho\sigma} X^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\lambda\nu_2 \dots \nu_m} - R^\lambda_{\nu_2\rho\sigma} X^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_m} - \dots \\
 &\quad - T^\lambda_{\rho\sigma} D_\lambda X^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_m}.
 \end{aligned}$$

Hemos visto que el tensor de curvatura y de torsión dependen directamente de los coeficientes de conexión. Para describir la geometría de una variedad se requiere, entonces, conocer estos coeficientes. La geometría se define típicamente por una transformación de coordenadas. Sin embargo, no hay forma directa de derivar los coeficientes de conexión a partir de las ecuaciones de transformación de coordenadas. En el Ejemplo (2.8) vimos que el tensor de la métrica puede obtenerse del jacobiano que contiene las derivadas de las transformaciones de coordenadas. Por lo tanto, necesitamos una relación entre la métrica y la conexión, a partir de la cual puedan obtenerse

los coeficientes de conexión cuando se conoce la métrica. Esta relación viene dada por la condición de compatibilidad métrica:

$$D_{\sigma}g_{\mu\nu} = \partial_{\sigma}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda}g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}g_{\mu\lambda} = 0. \quad (2.149)$$

Para un espacio de cuatro dimensiones, esta ecuación tensorial representa $4^3 = 64$ ecuaciones individuales. Las primeras de ellas (para los elementos diagonales de la métrica) son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0}g_{00} - 2\Gamma_{00}^0 g_{00} &= 0 \\ -\Gamma_{00}^1 g_{11} - \Gamma_{01}^0 g_{00} &= 0 \\ -\Gamma_{00}^2 g_{22} - \Gamma_{02}^0 g_{00} &= 0 \\ -\Gamma_{00}^3 g_{33} - \Gamma_{03}^0 g_{00} &= 0 \\ \dots & \end{aligned} \quad (2.150)$$

Nótese que la métrica es simétrica, por lo que no todas las ecuaciones son independientes. Es difícil ver cuántas ecuaciones independientes restan. El álgebra computacional (código disponible [8]) indica que la mitad (24 ecuaciones) dependen de las otras 24. Por lo tanto, podemos predefinir veinticuatro Gamas arbitrariamente. Una solución es, por ejemplo

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{\frac{\partial}{\partial x^0} g_{00}}{2g_{00}} \\ \Gamma_{01}^0 &= -\frac{g_{11}}{g_{00}} A_{25} \\ \Gamma_{02}^0 &= -\frac{g_{22}}{g_{00}} A_{43} \\ \Gamma_{03}^0 &= -\frac{g_{33}}{g_{00}} A_{40} \\ \Gamma_{10}^0 &= \frac{\frac{\partial}{\partial x^1} g_{00}}{2g_{00}} \\ \dots & \end{aligned} \quad (2.151)$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= A_{25} \\ \Gamma_{00}^2 &= A_{43} \\ \Gamma_{00}^3 &= A_{40} \\ \dots & \end{aligned} \quad (2.152)$$

donde las A_i son los parámetros predefinidos, pueden ser hasta funciones de x^{μ} . De la primera ecuación de (2.150) puede verse que el suponer $\Gamma_{00}^0 = 0$ no es buena elección, porque ello impone la restricción $\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = 0$ a priori en la métrica. Por ende, los elementos diagonales del par inferior de índices de Gama no desaparecen en general. Comparando las soluciones para Γ_{01}^0 y Γ_{10}^0 (2.151) resulta obvio que los Gamas no son simétricos en los índices inferiores.

Hallando los coeficientes de conexión, podemos construir los tensores de curvatura y torsión (2.134) y (2.132). Mientras que los coeficientes van al tensor de curvatura como está, el tensor de torsión mismo depende sólo de la parte antisimétrica de los Gamas. Cada 2-tensor o coeficiente de conexión puede dividirse en una parte simétrica y una antisimétrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho(S)} + \Gamma_{\mu\nu}^{\rho(A)} \quad (2.153)$$

con

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho(S)} &= \Gamma_{\nu\mu}^{\rho(S)}, \\ \Gamma_{\mu\nu}^{\rho(A)} &= -\Gamma_{\nu\mu}^{\rho(A)}.\end{aligned}\tag{2.154}$$

Para el tensor de torsión tenemos

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda(A)} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda(A)} = 2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda(A)},\tag{2.155}$$

la parte simétrica no entra en la torsión. Esto hace imponer requerimientos adicionales de antisimetría a los Gamas, en vez de elegir arbitrariamente 24 elementos. Así, además de la ecuación de compatibilidad de la métrica (2.149), definimos 24 ecuaciones adicionales

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = -\Gamma_{\nu\mu}^{\rho}\tag{2.156}$$

para todos los pares $\mu \neq \nu$ con $\mu > \nu$. Esto reduce el número de parámetros libres de solución de 24 a 4 (ver código [27]). La situación se complica cuando hay presentes elementos no diagonales en la métrica [27]. Podríamos hasta forzar una conexión simétrica pura al requerir

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \Gamma_{\nu\mu}^{\rho}.\tag{2.157}$$

Entonces ya no hay parámetros libres, todos los Gamas están definidos en forma única, donde 24 de ellos resultan iguales a cero. Sin embargo, en este caso, la torsión es cero y caeremos en conflictos irreversibles con leyes geométricas, como veremos en secciones posteriores. La razón de dejar cierta variabilidad en la conexión es: Deben cumplirse los teoremas de la geometría de Cartan, los cuales imponen condiciones adicionales en la curvatura y torsión y, por tanto, en la conexión.

Para completar, describimos cómo se computan los coeficientes de conexión simétrica en relatividad general einsteiniana. Comenzando con la Ec. (2.149), esta ecuación se expresa tres veces con índices permutados:

$$\begin{aligned}\partial_{\sigma}g_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\lambda}g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda}g_{\mu\lambda} &= 0, \\ \partial_{\mu}g_{\nu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}g_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}g_{\nu\lambda} &= 0, \\ \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}g_{\sigma\lambda} &= 0.\end{aligned}\tag{2.158}$$

Restando la segunda y tercera ecuación de la primera, y usando la simetría de la conexión, nos da

$$\partial_{\sigma}g_{\mu\nu} - \partial_{\mu}g_{\nu\sigma} - \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}g_{\lambda\sigma} = 0,\tag{2.159}$$

y multiplicando la ecuación por $g^{\sigma\rho}$ da para el término Gama:

$$(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}g_{\lambda\sigma})g^{\sigma\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(g_{\lambda\sigma}g^{\sigma\rho}) = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\delta_{\lambda}^{\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}.\tag{2.160}$$

A partir de (2.159) se obtiene entonces

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}).\tag{2.161}$$

Se determina completamente la conexión simétrica con la métrica, de acuerdo con nuestro resultado de la ecuación individual de compatibilidad de la métrica.

Todas las derivaciones en esta sección se ejemplificaron con una métrica diagonal. Siguen siendo válidas si se agregan elementos no diagonales, pero las soluciones devienen mucho más complicadas. Imponiendo condiciones adicionales de simetría o antisimetría a la conexión

podría conducir a resultados que difieran de aquellos para una métrica diagonal.

Nótese que la métrica de una dada geometría de una variedad no es única, puede depender de la elección del sistema de coordenadas. Recordando los ejemplos anteriores, el espacio euclidiano puede describirse con coordenadas cartesianas o esféricas, que conducen a diferentes tensores métricos. Sin embargo, la estructura del espaciotiempo es la misma, sólo el direccionamiento numérico de puntos cambia, como lo hacen las coordenadas de los vectores. Sin embargo, los vectores como objetos físicos (posición y longitud) permanecen iguales.

■ **Ejemplo 2.10** Computamos la conexión para el sistema de coordenadas esféricas (r, θ, φ) en tres casos: conexión general, conexión antisimétrica y conexión simétrica. Este ejemplo está disponible como código Maxima [25]. El tensor de la métrica es, del Ejemplo 2.5:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (2.162)$$

Dado que la métrica no depende del tiempo, los índices van de 1 a 3. Esto da $3^3 = 27$ ecuaciones a partir de compatibilidad métrica (2.149) cuyas primeras ecuaciones son

$$\begin{aligned} -2 \Gamma_{11}^1 &= 0 \\ -\Gamma_{11}^2 r^2 - \Gamma_{12}^1 &= 0 \\ -\Gamma_{11}^3 r^2 \sin^2(\theta) - \Gamma_{13}^1 &= 0 \\ -\Gamma_{11}^2 r^2 - \Gamma_{12}^1 &= 0 \\ 2r - 2 \Gamma_{12}^2 r^2 &= 0 \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.163)$$

La solución (obtenida por álgebra computacional) contiene 9 parámetros libres A_1, \dots, A_9 . Hay 27 soluciones en total. Algunas de ellas son:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0 \\ \Gamma_{13}^1 &= -A_9 r^2 \sin^2(\theta) \\ \Gamma_{31}^1 &= 0 \\ \Gamma_{33}^1 &= -A_3 r^2 \sin^2(\theta) \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{21}^2 &= -\frac{A_4}{r^2} \\ \Gamma_{23}^3 &= \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ \Gamma_{32}^3 &= A_2 \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.164)$$

Con 9 condiciones de antisimetría adicionales, las soluciones son

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11}^1 &= 0 & (2.165) \\
 \Gamma_{13}^1 &= \Gamma_{31}^1 = 0 \\
 \Gamma_{23}^1 &= -\Gamma_{32}^1 = -A_{10} \\
 \Gamma_{12}^2 &= -\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{23}^3 &= -\Gamma_{32}^3 = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Hay sólo un parámetro libre restante, A_{10} . Se retiene cierta similitud con la solución general, pero con antisimetría. Si se hacen cumplir los coeficientes de conexión simétricos, la mayor parte de los Gammas serán igual a cero. Los únicos coeficientes distintos de cero son:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{22}^1 &= -r & (2.166) \\
 \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2(\theta) \\
 \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{33}^2 &= -\cos(\theta) \sin(\theta) \\
 \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\
 \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}
 \end{aligned}$$

Este ejemplo está a menudo en textos de relatividad general. Si todas las coordenadas tienen la dimensión de longitud, entonces los coeficientes de conexión tienen igual dimensión física. En este ejemplo tenemos ángulos y longitudes, por lo que las dimensiones físicas difieren. ■

2.4.3 Derivada exterior

Hasta ahora tratamos con derivadas covariantes de tensores. Ahora extenderemos el concepto de derivadas a n-formas. Sabemos que una derivada parcial de un tensor no conserva propiedades de tensor. Por lo que definiremos una derivada apropiada para n-formas. Ya introdujimos formas antisimétricas en la sección 2.3. Es útil definir una derivada en estos objetos que conserve la antisimetría y propiedades de tensor. Una derivada parcial para una coordenada genera en un tensor un índice adicional, así que por la definición, una p-forma se extiende a una (p+1)-forma

$$(d \wedge A)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} := (p+1) \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]}. \quad (2.167)$$

Esta (p+1) - forma es un tensor, irrespectivamente de lo que sea A. La derivada exterior más sencilla es la de una función escalar $\phi(x_\mu)$ que es

$$(d \wedge \phi)_\mu = \partial_\mu \phi, \quad (2.168)$$

o sea, éste es el gradiente de ϕ . Otro ejemplo es la definición del campo electromagnético en forma tensorial $F_{\mu\nu}$ como una 2-forma (ver ejemplo 2.11 más abajo). Se obtiene como derivada exterior de una 1-forma, el potencial vectorial A_μ :

$$F_{\mu\nu} := (d \wedge A)_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.169)$$

El carácter tensorial de derivadas exteriores puede verse aplicando la ley de transformación (2.123) a un (0,1) tensor V por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} V_{\nu'} &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} V_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} V_{\nu} \right) \\ &= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu'}} V_{\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} V_{\nu}. \end{aligned} \quad (2.170)$$

El primer término en la segunda línea no debiera aparecer si esto fuese una transformación tensorial. Puede re-expresarse como

$$\frac{\partial^2 x^{\nu}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu'}} V_{\nu} \quad (2.171)$$

y ahora es simétrica en μ' y ν' . Dado que la derivada exterior sólo contiene sumas, todos estos términos desaparecen porque las derivadas parciales son conmutativas. Por lo tanto, $d \wedge V_{\nu}$ transforma como tensor, como también lo hacen todas las n-formas.

Una propiedad importante de la derivada exterior es que su doble aplicación da cero:

$$d \wedge (d \wedge A) = 0. \quad (2.172)$$

La razón es la misma que arriba, las derivadas parciales conmutan, y su suma es igual a cero en todas las sumas antisimétricas.

■ **Ejemplo 2.11** Describimos las ecuaciones de campo homogéneo de Maxwell en notación de forma y transformamos esto a la conocida forma vectorial (código [28]). Las leyes homogéneas son la de Gauss y la de Faraday. En notación tensorial se condensan en una ecuación:

$$d \wedge F = 0 \quad (2.173)$$

o con índices

$$(d \wedge F)_{\mu\nu\rho} = 0. \quad (2.174)$$

Porque F es una 2-forma, la derivada exterior de F es una 3-forma. El tensor de campo electromagnético es antisimétrico y definido por el tensor contravariante

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.175)$$

donde E^i son los componentes del campo eléctrico y B^i son los del campo magnético. Es $E^1 = E_x$, $E^2 = E_y$ etc. Para aplicar la derivada exterior, primero debemos transformar este tensor a su forma covariante. Dado que la electrodinámica clásica se lleva a cabo en un espacio euclidiano, empleamos la métrica de Minkowski para bajar los índices:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.176)$$

Entonces el tensor de campo covariante es

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & E^1 & E^2 & E^3 \\ -E^1 & 0 & -cB^3 & cB^2 \\ -E^2 & cB^3 & 0 & -cB^1 \\ -E^3 & -cB^2 & cB^1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.177)$$

Comparada con la forma contravariante, sólo han cambiado los signos de los componentes del campo eléctrico. Resolviendo la derivada exterior para $\mu = 0, \nu = 1, \rho = 2$, obtenemos

$$(d \wedge F)_{012} = \partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} - \partial_0 F_{21} - \partial_1 F_{02} - \partial_2 F_{10}. \quad (2.178)$$

Debido a que F es antisimétrico, los sumandos negativos son iguales a los sumandos positivos con el signo cambiado, de manera que obtenemos

$$(d \wedge F)_{012} = 2(\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01}), \quad (2.179)$$

esto es dos veces la suma cíclica de índices. Dado que (μ, ν, ρ) debe ser un subconjunto de $(0, 1, 2, 3)$, sólo las combinaciones

$(0, 1, 2)$

$(0, 1, 3)$

$(0, 2, 3)$

$(1, 2, 3)$

son posibles, y conducen a cuatro ecuaciones para $d \wedge F$. Fijando $F_{01} = E_X$ etc. lleva a las cuatro ecuaciones:

$$2(c\partial_0 B^3 + \partial_1 E^2 - \partial_2 E^1) = 0 \quad (2.180)$$

$$2(-c\partial_0 B^2 + \partial_1 E^3 - \partial_3 E^1) = 0$$

$$2(c\partial_0 B^1 + \partial_2 E^3 - \partial_3 E^2) = 0$$

$$2(c\partial_1 B^1 + c\partial_2 B^2 + c\partial_3 B_3) = 0$$

o, expresado con componentes cartesianos y simplificando:

$$\partial_t B_Z + \partial_X E_Y - \partial_Y E_X = 0 \quad (2.181)$$

$$\partial_t B_Y - \partial_X E_Z + \partial_Z E_X = 0$$

$$\partial_t B_X + \partial_Y E_Z - \partial_Z E_Y = 0$$

$$\partial_X B_X + \partial_Y B_Y + \partial_Z B_Z = 0$$

donde utilizamos $\partial_0 = 1/c \cdot \partial_t$. Comparando estas ecuaciones con el operador rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \partial_Y V_Z - \partial_Z V_Y \\ -\partial_X V_Z + \partial_Z V_X \\ \partial_X V_Y - \partial_Y V_X \end{bmatrix} \quad (2.182)$$

las primeras tres ecuaciones de (2.181) contienen la tercera, segunda y primera línea de este operador y puede expresarse en forma vectorial:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.183)$$

que es la ley de Faraday. La cuarta ecuación de (2.181) es la ley de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.184)$$

Concluimos este ejemplo con la sugerencia que las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (ley de Coulomb y de Ampère-Maxwell) no se escriben como derivada tensorial exterior debido a los términos actuales. Entonces debe usarse una formulación similar a la del siguiente ejemplo. ■

■ **Ejemplo 2.12** Como ejemplo con el dual de Hodge (código [29]), obtenemos las ecuaciones homogéneas de Maxwell de una notación tensorial que contiene el dual de Hodge del tensor del campo electromagnético introducido en el ejemplo precedente 2.11. En notación tensorial es:

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.185)$$

e involucra el dual de Hodge del tensor de campo de 4 x 4, definido como sigue:

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & -cB^1 & -cB^2 & -cB^3 \\ cB^1 & 0 & -E^3 & E^2 \\ cB^2 & E^3 & 0 & -E^1 \\ cB^3 & -E^2 & E^1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.186)$$

Los índices se suben utilizando la métrica de Minkowski (2.176):

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\rho} \tilde{F}_{\kappa\rho} \quad (2.187)$$

Por lo tanto el dual de Hodge covariante es:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & cB^1 & cB^2 & cB^3 \\ -cB^1 & 0 & -E^3 & E^2 \\ -cB^2 & E^3 & 0 & -E^1 \\ -cB^3 & -E^2 & E^1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.188)$$

por ejemplo:

$$\tilde{F}_{01} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{0123} F^{23} + \varepsilon_{0132} F^{32}) = F^{23} \quad (2.189)$$

y

$$\tilde{F}^{01} = \eta^{00} \eta^{11} \tilde{F}_{01} = -\tilde{F}_{01}. \quad (2.190)$$

Las leyes homogéneas de la electrodinámica clásica se obtienen como sigue por selección de índices. La ley de Gauss se obtiene eligiendo:

$$\nu = 0 \quad (2.191)$$

y así

$$\partial_1 \tilde{F}^{10} + \partial_2 \tilde{F}^{20} + \partial_3 \tilde{F}^{30} = 0. \quad (2.192)$$

En notación vectorial esto es

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.193)$$

La ley de inducción de Faraday eligiendo:

$$\nu = 1, 2, 3 \quad (2.194)$$

y son tres ecuaciones de tres componentes:

$$\begin{aligned} \partial_0 \tilde{F}^{01} + \partial_2 \tilde{F}^{21} + \partial_3 \tilde{F}^{31} &= 0 \\ \partial_0 \tilde{F}^{02} + \partial_1 \tilde{F}^{12} + \partial_3 \tilde{F}^{32} &= 0 \\ \partial_0 \tilde{F}^{03} + \partial_1 \tilde{F}^{13} + \partial_2 \tilde{F}^{23} &= 0. \end{aligned} \quad (2.195)$$

Estas pueden condensarse en una ecuación vectorial, que es

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (2.196)$$

La forma diferencial, y las notaciones vectorial y tensorial se resumen como sigue:

$$d \wedge F = 0 \rightarrow \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.197)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Las leyes homogéneas de la electrodinámica clásica se representan en forma muy elegante con la notación de forma diferencial, pero representado en forma más útil por la notación vectorial. ■

Derivada covariante exterior

Hasta ahora vimos que las derivadas exteriores son sumas antisimétricas de derivadas parciales aplicadas a n-formas. La cuestión es qué ocurre si queremos combinar el concepto de derivada exterior con una derivada covariante. Esta es una generalización del concepto que debiera ser más apropiado a variedades curvas, donde las derivadas covariantes juegan un importante papel para su descripción, por ejemplo para definir conmutadores como en la sección 2.4.2. Podemos definir una derivada covariante exterior creando una (n+1)-forma desde una n-forma A:

$$D \wedge A := (D \wedge A)_{\mu_1 \dots \mu_{n+1}} = D_{[\mu} \wedge A_{\nu_1 \dots \nu_n]}. \quad (2.198)$$

Para una 1-forma A_ν esto es, entonces

$$\begin{aligned} D \wedge A &= (D \wedge A)_{\mu\nu} = D_{[\mu} \wedge A_{\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda - \partial_\nu A_\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda A_\lambda \\ &= \partial_{[\mu} A_{\nu]} - (\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) A_\lambda \end{aligned} \quad (2.199)$$

y con la definición (2.132) del tensor de torsión, esto puede expresarse:

$$D \wedge A = \partial_{[\mu} A_{\nu]} - T_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda. \quad (2.200)$$

Dado que el lado derecho es un tensor, $D \wedge A$ también es un tensor. La ecuación puede expresarse en notación de forma:

$$D \wedge A = d \wedge A - T A. \quad (2.201)$$

Extenderemos más este concepto en el siguiente capítulo.

2.5 Geometría de Cartan

Luego de desarrollar los elementos básicos de la geometría de Riemann, incluida la torsión, nos aproximamos al elemento central de este libro: la geometría de Cartan. Ésta será el fundamento matemático de todos los campos de la física, como ya veremos.

2.5.1 Espacio tangente, tétradas y métrica

Con la geometría de Riemann como base, tenemos casi todas las herramientas necesarias para desarrollar la geometría de Cartan. Debemos enfocarnos en espacios tangentes. En la sección 2.1 vimos transformación de coordenadas en la variedad base. El espacio tangente en un punto x en la variedad base se introdujo como espacio de Minkowski de la misma dimensión para el entorno local de x . Un vector V^μ definido en la variedad base puede transformarse en un vector en espacio tangente denotado como V^a . Introducimos índices latinos para denotar vectores y

tensores en espacio tangente. Un vector en la variedad base puede transformarse al correspondiente en el espacio tangente mediante una matriz de transformación q . Esto es similar a la introducción de la matriz de transformación α en las Ecs. (2.46) y sigs, pero con la diferencia de que la transformación ocurre entre dos espacios diferentes. La transformación básica es

$$V^a = q^a_{\mu} V^{\mu} \quad (2.202)$$

con elementos de matriz de transformación q^a_{μ} . Esta es la base de la geometría de Cartan, y q se llama la *tétrada*. q transforma entre la variedad base y el espacio tangente. La transformación inversa es $q^{-1} = (q^{\mu}_a)$, produciendo un vector en la variedad base:

$$V^{\mu} = q^{\mu}_a V^a. \quad (2.203)$$

Si la métrica del espacio tangente η_{ab} se transforma a la variedad base (éste es un tensor (0,2)), el resultado debe de ser la métrica de la variedad base $g_{\mu\nu}$ por definición:

$$g_{\mu\nu} = q^a_{\mu} q^b_{\nu} \eta_{ab}, \quad (2.204)$$

y en forma inversa:

$$\eta_{ab} = q^{\mu}_a q^{\nu}_b g_{\mu\nu}. \quad (2.205)$$

Dado que q es una transformación de coordenadas, el producto de q y su inversa es matriz unitaria:

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{1} \quad (2.206)$$

que, expresada en forma de componentes, es

$$q^a_{\mu} q^{\nu}_a = \delta^{\nu}_{\mu}, \quad (2.207)$$

$$q^a_{\mu} q^{\mu}_b = \delta^a_b. \quad (2.208)$$

La suma de los elementos diagonales de (2.206), llamada la *traza*, es la dimensión de los espacios entre los que ocurre la transformación, digamos n :

$$q^a_{\mu} q^{\mu}_a = n. \quad (2.209)$$

Sin embargo, esta clase de producto sumado ocurrirá a menudo en nuestros cálculos, y resulta benéfico dejar que el resultado sea igual a la unidad:

$$q^a_{\mu} q^{\mu}_a := 1. \quad (2.210)$$

Así, introducimos un factor de escala de $1/\sqrt{n}$ a elementos de la tétrada y \sqrt{n} a elementos de la tétrada inversa:

$$q^a_{\mu} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} q^a_{\mu}, \quad (2.211)$$

$$q^{\mu}_a \rightarrow \sqrt{n} q^{\mu}_a. \quad (2.212)$$

Así la condición (2.205) sigue cumpliéndose.

■ **Ejemplo 2.13** Consideramos la transformación a coordenadas polares esféricas, la Ec. (2.58) del Ejemplo (2.4):

$$\alpha = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.213)$$

La transformación inversa es

$$\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) & \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \frac{\cos(\phi) \cos(\theta)}{r} & \frac{\sin(\phi) \cos(\theta)}{r} & -\frac{\sin(\theta)}{r} \\ -\frac{\sin(\phi)}{r \sin(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{r \sin(\theta)} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.214)$$

como puede verse del ejemplo de código [30]. Para hacer de esta transformación una tétrada de una variedad base cartesiana a un espacio tangente euclidiana con coordenadas polares esféricas, debemos establecer

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{3}} \alpha, \quad (2.215)$$

$$\mathbf{q}^{-1} = \sqrt{3} \alpha^{-1}. \quad (2.216)$$

Entonces tenemos

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.217)$$

que es la matriz unitaria como se requiere. ■

2.5.2 Derivadas en el espacio tangente

Investigaremos ahora el cálculo diferencial en el espacio tangente y cómo se conecta al de la variedad base. El espacio tangente en un punto x es un espacio euclidiano y podíamos argumentar que podemos usar, por tanto, diferenciación ordinaria. Para definir una derivada, hay que construir transiciones infinitesimales en el entorno de x . Para un punto $y \neq x$, sin embargo, se define otro espacio tangente por la definición de espacios tangentes. Por ende, la estructura curva de la variedad base debe respetarse al definir derivada en espacios tangentes. En la variedad base definimos la variedad base para éste propósito, ver la Ec. (2.120):

$$D_\mu V^\nu := \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (2.218)$$

donde las derivadas parciales ∂_μ y los coeficientes de conexión $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ operan en un vector V^λ en la variedad base. Podemos usar la misma definición para un vector V^a en un espacio tangente, pero los coeficientes de conexión son diferentes aquí:

$$D_\mu V^a := \partial_\mu V^a + \omega^a_{\mu b} V^b \quad (2.219)$$

El papel de los coeficientes de conexión es asumido por otros coeficientes llamados *conexión de espín* $\omega^a_{\mu b}$. Estos tienen el mismo número de índices que los Γ pero transforman en el espacio tangente. Por ello tienen dos índices latinos. El nombre de "conexión de espín" viene del hecho de que éste puede usarse para definir derivadas covariantes de espino-tensores, lo cual es imposible usando los coeficientes de conexión Γ . La derivada misma D_μ se define respecto a la variedad base y, por lo tanto, tiene un índice griego. Esto también tiene que estar presente en la conexión de espín para mantener los índices como se requieren para una expresión tensorial.

Las derivadas covariantes de un tensor de índice mixto se definen de un modo en que los índices del espacio tangente están acompañados por una conexión de espín y los índices de la variedad base lo están por una conexión de Christoffel, por ejemplo:

$$D_\mu V^a_{\nu} = \partial_\mu V^a_{\nu} + \omega^a_{\mu b} V^b_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} V^a_{\lambda}. \quad (2.220)$$

o

$$D_\mu X^{ab}_{cv} = \partial_\mu X^{ab}_{cv} + \omega^a_{\mu d} X^{db}_{cv} + \omega^b_{\mu d} X^{ad}_{cv} - \omega^d_{\mu c} X^{ab}_{dv} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} X^{ab}_{c\lambda}. \quad (2.221)$$

En el segundo ejemplo, d y λ son índices ficticios. Las sumatorias sobre índices inferiores (contravariantes) poseen un signo negativo tanto para los términos de la conexión de espín como para la conexión de Christoffel. Ni las conexiones de espín ni las conexiones Γ son tensores. Sin embargo, las expresiones con derivadas covariantes son tensores.

2.5.3 Derivadas exteriores en espacio tangente

En la sección 2.4.3 introdujimos derivadas exteriores. Estas son n-formas basadas en derivadas covariantes. Considerando un tensor de índice mixto V_{μ}^a , podemos interpretar esto como una 1-forma de valor vectorial, donde a es el índice del componente vectorial. Así, V^a sería una notación breve de esta 1-forma. El concepto de n-formas antisimétricas se introdujo en la sección 2.3. Una derivada exterior de n-formas se introdujo en la sección 2.4.3, donde una p-forma se extiende a una (p + 1)-forma al introducir el operador de derivada antisimétrica $d \wedge$, ver la Ec. (2.167):

$$(d \wedge A)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = (p + 1) \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]} \quad (2.222)$$

Podemos extender este concepto al espacio tangente. Primero, la definición de la derivada covariante se puede extenderse a tensores de índice mixto, al dar a A uno o más índices de espacio tangente:

$$(d \wedge A^b)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} := (p + 1) \partial_{[\mu_1} A^b_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]} \quad (2.223)$$

Esta definición se explica por sí sola, pero en variedades curvas es más importante definir una derivada exterior covariante de p-formas basando esta definición en el operador de derivadas covariantes D_{μ} . En notación de formas esta clase de derivada covariante se expresa mediante

$$(D \wedge A^b)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} := (p + 1) D_{[\mu_1} A^b_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]} \quad (2.224)$$

donde las D 's del lado derecho son las derivadas covariantes "usuales" de índice de coordenadas μ_1 etc. como se definen en (2.220), por ejemplo. A puede ser un tensor con un número arbitrario de índices griegos y romanos, como antes. Los índices griegos inferiores definen la p-forma. En notación abreviada sin índices podemos también escribir:

$$D \wedge A := (p + 1) D_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]} \quad (2.225)$$

Regresaremos luego a esta notación breve. Por ejemplo, la Ec. (2.220) se lee con derivada covariante exterior e índices de coordenadas $\mu \in \{0, 1, 2\}$:

$$\begin{aligned} D \wedge V^a &= (D \wedge V^a)_{\mu\nu} \\ &= 2(D_0 V_1^a + D_1 V_2^a + D_2 V_0^a - D_1 V_0^a - D_2 V_1^a - D_0 V_2^a) \\ &= 2(D_0(V_1^a - V_2^a) + D_1(V_2^a - V_0^a) + D_2(V_0^a - V_1^a)) \end{aligned} \quad (2.226)$$

donde las derivadas covariantes "normales" se definen como antes, por ejemplo:

$$D_0 V_1^a = \partial_0 V_1^a + \omega^a_{0b} V_1^b - \Gamma^{\lambda}_{01} V_{\lambda}^a \quad (2.227)$$

La antisimetría de la 2-forma (2.226) requiere

$$(D \wedge V^a)_{\mu\nu} = -(D \wedge V^a)_{\nu\mu} \quad (2.228)$$

de lo cual sigue que intercambiando los índices μ y ν da el resultado negativo de (2.226). Que esto es el caso puede verse directamente a partir de la segunda línea de la ecuación.

2.5.4 Postulado de la téttrada

Dado que el espacio tangente se relaciona en forma única a la variedad base vía la matriz de la téttrada $q^a{}_\mu$, las conexiones Γ de la variedad y las conexiones de espín del espacio tangente se relacionan entre sí. Para ver como esto sucede, empleamos la así-llamada *compatibilidad métrica*, la declaración de que un vector debe ser igual cuando se le describe mediante diferentes sistemas de coordenadas. Para singularidad física esto resulta necesario, si no es así es que estamos empleando un tipo de matemática que no se relaciona con objetos y procesos físicos. Ya introdujimos este concepto en la sección 2.4.2 para vectores en la variedad base. Aquí extendemos el concepto al espacio tangente en la geometría de Cartan. Podemos entonces representar una derivada covariante de un vector tangente de dos maneras. Denotando los vectores unitarios ortonormales en la variedad base \hat{e}_ν y los del espacio tangente como \hat{e}_a , escribimos

$$DV = D_\mu V^\nu = (\partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} V^\lambda) \hat{e}_\nu \quad (2.229)$$

y

$$DV = D_\mu V^a = (\partial_\mu V^a + \omega^a{}_{\mu b} V^b) \hat{e}_a \quad (2.230)$$

para el mismo vector DV . En el segundo caso también se conoce como una *base mixta* porque la derivada se relaciona con la variedad como antes. La segunda ecuación puede transformarse en las coordenadas de la variedad base al transformar las coordenadas V^a y los vectores unitarios \hat{e}_a según las reglas introducidas en la sección 2.5.1 y renombrando los índices ficticios:

$$\begin{aligned} D_\mu V^a &= (\partial_\mu V^a + \omega^a{}_{\mu b} V^b) \hat{e}_a & (2.231) \\ &= (\partial_\mu (q^a{}_\nu V^\nu) + \omega^a{}_{\mu b} q^b{}_\lambda V^\lambda) q^\sigma{}_a \hat{e}_\sigma \\ &= q^\sigma{}_a (\partial_\mu q^a{}_\nu V^\nu + V^\nu \partial_\mu q^a{}_\nu + \omega^a{}_{\mu b} q^b{}_\lambda V^\lambda) \hat{e}_\sigma \\ &= (\partial_\mu V^\nu + q^a{}_\nu V^\lambda \partial_\mu q^a{}_\lambda + \omega^a{}_{\mu b} q^a{}_\nu q^b{}_\lambda V^\lambda) \hat{e}_\nu. \end{aligned}$$

Comparando con la Ec. (2.229) entonces da directamente

$$\boxed{\Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} = q^a{}_\nu \partial_\mu q^a{}_\lambda + q^a{}_\nu q^b{}_\lambda \omega^a{}_{\mu b}.} \quad (2.232)$$

Multiplicando esta ecuación con $q^c{}_\lambda$ y aplicando las mismas reglas que antes da

$$q^c{}_\lambda \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} = q^a{}_\nu \omega^a{}_{\mu c} + q^c{}_\lambda q^a{}_\nu \partial_\mu q^a{}_\lambda \quad (2.233)$$

y multiplicando con $q^b{}_\nu$ nos da

$$q^b{}_\nu q^c{}_\lambda \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} = \omega^b{}_{\mu c} + q^c{}_\lambda \partial_\mu q^b{}_\lambda \quad (2.234)$$

que luego de renombrar los índices es

$$\boxed{\omega^a{}_{\mu b} = q^a{}_\nu q^c{}_\lambda \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} - q^c{}_\lambda \partial_\mu q^a{}_\lambda.} \quad (2.235)$$

Así, obtuvimos las relaciones entre ambos tipos de conexiones buscadas. Conociendo una de ellas y la matriz de la téttrada nos permite computar la otra conexión.

Podemos, además, multiplicar la Ec. (2.232) por $q^c{}_\nu$, obteniendo (luego de aplicar las reglas)

$$q^c{}_\nu \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda} = \partial_\mu q^a{}_\lambda + q^b{}_\lambda \omega^a{}_{\mu b}. \quad (2.236)$$

Tal como puede verse por comparación con (2.220), estos son exactamente los términos de la derivada covariante del tensor q^a_v en una base mixta. Se deduce entonces

$$\boxed{D_\mu q^a_v = 0.} \quad (2.237)$$

Esto se denomina el *postulado de la tétrada*. Establece que la derivada covariante de todos los elementos desaparece.

Esta es una consecuencia de compatibilidad métrica que postulamos al principio de esta sección. Como se vio previamente en la Ec. (2.139), la compatibilidad métrica en la variedad base se define por una ecuación análoga para la métrica:

$$D_\sigma g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.238)$$

Si el espacio es euclidiano, tenemos

$$D_\sigma \eta_{\mu\nu} = 0 \quad (2.239)$$

para la métrica de Minkowski (2.176). Ya que esto también es la métrica para el espacio tangente, podemos aplicar la definición correspondiente de la derivada covariante:

$$D_\mu \eta_{ab} = \partial_\mu \eta_{ab} - \omega^c_{\mu a} \eta_{cb} - \omega^c_{\mu b} \eta_{ac} = 0. \quad (2.240)$$

La métrica de Minkowski baja los índices latinos de las conexiones de espín, para dar

$$-\omega_{a\mu b} - \omega_{b\mu a} = 0 \quad (2.241)$$

ó

$$\omega_{a\mu b} = -\omega_{b\mu a}. \quad (2.242)$$

La compatibilidad métrica da la propiedad de antisimetría para las conexiones de espín. Nótese que la antisimetría sólo se define si los respectivos índices están todos en una posición inferior o superior. A pesar de esta antisimetría, la conexión de espín no es un tensor, como también es el caso para la conexión Γ . Las propiedades de simetría de la conexión Γ se vieron en sección 2.4.2.

■ **Ejemplo 2.14** Computamos algunos ejemplos de conexión de espín de la Ec. (2.235). Requerimos una dada geometría definida por una tétrada y los coeficientes de conexión de Christoffel. Regresamos al ejemplo 2.13 donde consideramos una transformación a coordenadas polares esféricas. Interpretamos esto de modo tal que las coordenadas polares de la variedad base transforman a coordenadas cartesianas del espacio tangente. Según las Ecs. (2.213) y (2.215) la matriz de la tétrada es

$$\mathbf{q} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.243)$$

Las conexiones de espín para coordenadas polares esféricas se investigaron en tres variantes en el ejemplo 2.10:

1. una conexión general,
2. una conexión antisimetrizada en los índices no-diagonales inferiores,
3. una conexión simétrica como se conoce de la relatividad einsteiniana.

Estas funciones para las Γ deben de insertarse en (2.235), junto con los elementos de la tétrada de (2.243). Nótese que los elementos de la tétrada y los de la tétrada inversa ocurren en (2.235). Los q^a_v son los elementos de (2.243) y los q^v_a son los de la matriz de la tétrada inversa, la Ec.(2.214).

El cálculo es extenso y se ha codificado en el ejemplo de código [31]. Los resultados para el caso 1 (la conexión general) son, por ejemplo:

$$\begin{aligned}\omega_{1(1)}^{(1)} &= 0, \\ \omega_{1(2)}^{(1)} &= -\sin(\theta) (A_9 r \sin(\theta) + A_8 \cos(\theta)), \\ \omega_{1(3)}^{(1)} &= A_8 \sin(\phi) \sin(\theta)^2 - A_9 \sin(\phi) r \cos(\theta) \sin(\theta) - \frac{A_7 \cos(\phi)}{r}.\end{aligned}\tag{2.244}$$

Las A 's son constantes contenidas en los Γ 's. Obviamente, poseen diferentes unidades físicas, caso contrario habría problemas en las sumatorias. Con el objeto de discernir números actuales de los índices latinos y griegos, los números de los índices latinos se han colocado entre paréntesis. Para el caso 2, de más arriba, los resultados son más sencillos.

$$\begin{aligned}\omega_{1(1)}^{(1)} &= 0, \\ \omega_{1(2)}^{(1)} &= \frac{A_{10} \cos(\theta)}{r^2 \sin(\theta)}, \\ \omega_{1(3)}^{(1)} &= -\frac{A_{10} \sin(\phi)}{r^2},\end{aligned}\tag{2.245}$$

en el caso 3 (conexiones de Christoffel simétricas) todas las conexiones de espín desaparecen:

$$\omega_{\mu b}^a = 0,\tag{2.246}$$

indicando que no hay conexión de espín para una geometría sin torsión. La antisimetría se cumple hasta en el caso donde a y b son índices en diferentes posiciones (superior e inferior), porque la métrica en el espacio tangente es la matriz unitaria. La antisimetría se ha verificado en el código, siempre es

$$\omega_{\mu b}^a = -\omega_{\mu a}^b\tag{2.247}$$

tal como se requiere. ■

2.5.5 Lema de Evans

Llegamos ahora a algunas propiedades más específicas de la geometría de Cartan. El postulado de la tétrada puede modificarse para dar una ecuación diferencial de segundo orden para los elementos de la tétrada. Esta ecuación es una ecuación de onda, y es fundamental para muchos campos de la física. El postulado de la tétrada (2.237) puede aumentarse mediante una derivada adicional:

$$D^\mu (D_\mu q^a_\nu) = 0.\tag{2.248}$$

Introducimos una derivada covariante con índice superior a fin de hacer de μ un índice (ficticio) de sumatoria. Debido a que la expresión en paréntesis es una función escalar debido al postulado de la tétrada, no es necesario preocuparse por la forma de definir esta derivada, ya que se reduce a una derivada parcial por definición. De manera que podemos expresar:

$$\partial^\mu (D_\mu q^a_\nu) = 0.\tag{2.249}$$

6

$$\partial^\mu (\partial_\mu q^a_\nu + \omega^a_{\mu b} q^b_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} q^a_\lambda) = 0.\tag{2.250}$$

En una variedad con 4-vectores $[ct, X, Y, Z]$, la forma contravariante de la derivada parcial se define como de costumbre:

$$[\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3] = \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z} \right], \quad (2.251)$$

en tanto la forma covariante de la derivada parcial se defina con el signo cambiado para las derivadas espaciales:

$$[\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3] = \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial X}, -\frac{\partial}{\partial Y}, -\frac{\partial}{\partial Z} \right]. \quad (2.252)$$

Por lo tanto, $\partial^\mu \partial_\mu$ es el operador de d'Alambert

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2}{\partial Z^2}. \quad (2.253)$$

Entonces, a partir de la Ec. (2.250) se obtiene

$$\square q^a{}_\nu + G^a{}_\nu = 0 \quad (2.254)$$

una ecuación de onda con la función temporal

$$G^a{}_\nu = \partial^\mu (\omega^a{}_{\mu b} q^b{}_\nu) - \partial^\mu (\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} q^a{}_\lambda). \quad (2.255)$$

Esta ecuación puede hacerse una ecuación de eigenvalores requiriendo que $G^a{}_\nu$ se divida en una parte de la tetrada y una función escalar R :

$$G^a{}_\mu = R q^a{}_\nu \quad (2.256)$$

con

$$R = q^{\nu}{}_a \left(\partial^\mu (\omega^a{}_{\mu b} q^b{}_\nu) - \partial^\mu (\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} q^a{}_\lambda) \right). \quad (2.257)$$

R contiene sólo índices ficticios y es una función escalar. Así, (2.254) puede escribirse

$$\boxed{\square q^a{}_\nu + R q^a{}_\nu = 0} \quad (2.258)$$

y se llama el *lema de Evans*. Es una ecuación de eigenvalores covariante generalizada. R juega el papel de una curvatura, como veremos en futuros capítulos. El campo completo de mecánica cuántica covariante generalizada se basa en esta ecuación. La misma es altamente no lineal porque R depende de la eigenfunción $q^a{}_\nu$ y de las conexiones de Christoffel y de espín. En capítulos posteriores a menudo supondremos que R es una constante en primera aproximación.

2.5.6 Ecuaciones estructurales de Maurer-Cartan

Los tensores de torsión y de curvatura de la geometría de Riemann pueden transformarse en 2-formas de la geometría de Cartan mediante la simple definición de

$$T^a{}_{\mu\nu} := q^a{}_\kappa T^\kappa{}_{\mu\nu}, \quad (2.259)$$

$$R^a{}_{b\mu\nu} := q^a{}_\rho q^\sigma{}_b R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}. \quad (2.260)$$

La multiplicación con elementos de la tetrada sustituye algunos índices griegos a índices latinos del espacio tangente, y así los tensores de torsión y de curvatura definidos en las Ecs. (2.132) y (2.134) se vuelven 2-formas de torsión y curvatura. A estas formas les aplican dos relaciones

fundacionales, que se deducirán en esta sección. Empleamos la prueba descrita en [11]. Primero definimos formas de las conexiones de Christoffel y de espín similares a (2.259) y (2.260):

$$\Gamma^a_{\mu\nu} := q^a_{\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}, \quad (2.261)$$

$$\omega^a_{\mu\nu} := q^b_{\nu} \omega^a_{\mu b}. \quad (2.262)$$

Estas también son 2-formas. Con estas definiciones, el postulado de la tetrada (2.237) puede formularse insertando estas definiciones en (2.236) que ya tiene esta forma:

$$\Gamma^a_{\mu\nu} = \partial_{\mu} q^a_{\nu} + \omega^a_{\mu\nu}. \quad (2.263)$$

Insertando la definición de torsión

$$T^{\kappa}_{\mu\nu} := \Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu} \quad (2.264)$$

en (2.259) nos da

$$T^a_{\mu\nu} = q^a_{\kappa} (\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} - \Gamma^{\kappa}_{\nu\mu}) = \Gamma^a_{\mu\nu} - \Gamma^a_{\nu\mu}, \quad (2.265)$$

e insertando la relación (2.263) da

$$T^a_{\mu\nu} = \partial_{\mu} q^a_{\nu} - \partial_{\nu} q^a_{\mu} + \omega^a_{\mu\nu} - \omega^a_{\nu\mu}. \quad (2.266)$$

Esto puede expresarse con el operador \wedge para formas antisimétricas introducidas en el ejemplo 2.8 y la sección 2.4.3 como

$$(T^a)_{\mu\nu} = (d \wedge q^a)_{\mu\nu} + (\omega^a_b \wedge q^b)_{\mu\nu} \quad (2.267)$$

o en notación abreviada:

$$\boxed{T^a = d \wedge q^a + \omega^a_b \wedge q^b} \quad (2.268)$$

que se llama la *primera ecuación estructural de Maurer-Cartan*.

El tensor de curvatura de Riemann se define como

$$R^{\lambda}_{\rho\mu\nu} := \partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}. \quad (2.269)$$

Definimos 1-formas adicionales de la conexión de Christoffel:

$$\Gamma^a_{\mu b} := q^a_{\lambda} q^{\nu}_b \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \quad (2.270)$$

y de (2.263) tenemos

$$\Gamma^a_{\mu b} = q^{\nu}_b (\partial_{\mu} q^a_{\nu} + \omega^a_{\mu\nu}). \quad (2.271)$$

Entonces la forma de curvatura (2.260) puede expresarse:

$$R^a_{b\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^a_{\nu b} - \partial_{\nu} \Gamma^a_{\mu b} + \Gamma^a_{\mu c} \Gamma^c_{\nu b} - \Gamma^a_{\nu c} \Gamma^c_{\mu b}. \quad (2.272)$$

Esta es una 2-forma antisimétrica, que en notación de forma se lee:

$$R^a_b = d \wedge \Gamma^a_b + \Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b. \quad (2.273)$$

El primer término en la derecha es

$$d \wedge \Gamma^a_b = (d \wedge d \wedge q^a)q_b + d \wedge \omega^a_b = d \wedge \omega^a_b \quad (2.274)$$

debido a la regla $d \wedge d \wedge a = 0$ para cualquier forma a . El segundo término de (2.273) es

$$\Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b = (q_c d \wedge q^a + \omega^a_c) \wedge (q_b d \wedge q^c + \omega^c_b). \quad (2.275)$$

Los términos con derivada exterior pueden escribirse con índices completos como $q^v_c \partial_\mu q^a_v$ por ejemplo. El producto se suma sobre el índice ficticio v .

A partir de la regla de Leibniz hallamos:

$$q^\lambda_c \partial_\mu q^a_\lambda + q^a_\lambda \partial_\mu q^\lambda_c = \partial_\mu (q^\lambda_c q^a_\lambda) = \partial_\mu \delta^a_c = 0, \quad (2.276)$$

por lo tanto:

$$q^\lambda_c \partial_\mu q^a_\lambda = -q^a_\lambda \partial_\mu q^\lambda_c. \quad (2.277)$$

La sumatoria de la izquierda y de la derecha pueden contraerse a funciones

$$q^a_c = -q^a_c. \quad (2.278)$$

Se deduce

$$q^a_c = 0, \quad (2.279)$$

$$q^v_c \partial_\mu q^a_v = 0. \quad (2.280)$$

Por lo tanto, de (2.275):

$$\Gamma^a_c \wedge \Gamma^c_b = \omega^a_c \wedge \omega^c_b \quad (2.281)$$

y con (2.274) obtenemos de (2.273) en total:

$$\boxed{R^a_b = d \wedge \omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b} \quad (2.282)$$

que se llama la *segunda ecuación estructural de Maurer-Cartan*. Con la definición de la derivada exterior covariante (2.198) las ecuaciones estructurales de Maurer-Cartan pueden expresarse en la forma

$$\boxed{T^a = D \wedge q^a = d \wedge q^a + \omega^a_b \wedge q^b,} \quad (2.283)$$

$$\boxed{R^a_b = D \wedge \omega^a_b = d \wedge \omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b.} \quad (2.284)$$

■ **Ejemplo 2.15** La validez de las ecuaciones estructurales se demuestra con un ejemplo. Tomamos el ejemplo de la transformación de coordenadas polares esféricas. La tétrada se definió en el ejemplo 2.13, las conexiones de espín en el ejemplo 2.14. Para las conexiones Gama se emplearon dos versiones: una conexión general, asimétrica y una conexión antisimétrica, como se describió en el ejemplo 2.14. Conociendo la conexión Gama podemos calcular la forma de torsión.

Esto se ha efectuado en el ejemplo de código [32]. La antisimetría de los elementos de forma en los dos últimos índices se verifica:

$$T^a_{\mu\nu} = -T^a_{\nu\mu}, \quad (2.287)$$

$$R^a_{b\mu\nu} = -R^a_{b\nu\mu}. \quad (2.288)$$

Por ejemplo hallamos con la conexión antisimetrizada:

$$T^{(2)}_{11} = 0 \quad (2.289)$$

$$T^{(2)}_{13} = \frac{2 \cos(\phi) \sin(\theta)}{\sqrt{3}} + \frac{2A_{10} \sin(\phi) \cos(\theta)}{\sqrt{3}r} \quad (2.290)$$

$$T^{(2)}_{31} = -\frac{2 \cos(\phi) \sin(\theta)}{\sqrt{3}} - \frac{2A_{10} \sin(\phi) \cos(\theta)}{\sqrt{3}r} \quad (2.291)$$

$$R^{(1)}_{(3)11} = 0 \quad (2.292)$$

$$R^{(1)}_{(3)13} = -\frac{A_{10}^2 \sin(\phi) \cos(\theta)}{r^3 \sin(\theta)} \quad (2.293)$$

$$R^{(1)}_{(3)31} = \frac{A_{10}^2 \sin(\phi) \cos(\theta)}{r^3 \sin(\theta)} \quad (2.294)$$

Ahora todos los elementos de la forma de torsión y curvatura se computan y estamos listos para evaluar los lados derechos de las ecuaciones estructurales (2.283) y (2.284), que en forma indexada puede expresarse:

$$D_\mu q^a_\nu - D_\nu q^a_\mu = \partial_\mu q^a_\nu - \partial_\nu q^a_\mu + \omega^a_{\mu b} q^b_\nu - \omega^a_{\nu b} q^b_\mu \quad (2.295)$$

y

$$D_\mu \omega^a_{\nu b} - D_\nu \omega^a_{\mu b} = \partial_\mu \omega^a_{\nu b} - \partial_\nu \omega^a_{\mu b} + \omega^a_{\mu c} \omega^c_{\nu b} - \omega^a_{\nu c} \omega^c_{\mu b}. \quad (2.296)$$

Las derivadas covariantes se han resuelto según sus definiciones para cada permutación de (μ, ν) . Cuando los índices corren sobre *todos* los valores 1, 2, esto no importa porque la propiedad de antisimetría establece todas las cantidades con índices iguales, por ejemplo $(\mu, \nu) = (1, 1)$, a cero. En el ejemplo del código [32] se muestra que los lados derechos de las ecuaciones estructurales son iguales a las definiciones de la forma de curvatura y torsión definidas por (2.285) y (2.286). Además, se muestra que el recómputo de los tensores de torsión y curvatura a partir de sus 2-formas dan los tensores originales (2.264) y (2.269):

$$T^p_{\mu\nu} = q^p_a T^a_{\mu\nu}, \quad (2.297)$$

$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} = q^\sigma_a q^b_\rho R^a_{b\mu\nu}. \quad (2.298)$$

■



3. Teoremas fundamentales de geometría de Cartan

3.1 Identidad de Cartan-Bianchi

Hemos llegado a un nivel de conocimientos de la geometría de Cartan que nos permite formular los teoremas fundamentales de esta geometría. Algunos se han mencionado en libros de texto [12] pero la mayoría se desarrollaron con la teoría ECE. Los teoremas pueden formularse fácilmente en notación de forma, pero para las demostraciones debemos descender a la notación tensorial y luego escalar otra vez a la notación de forma. La *identidad de Cartan-Bianchi* [12] se llama también la *primera identidad de Bianchi*, o sólo la *identidad de Bianchi* en geometría de Riemann sin torsión. Agregamos el nombre de Cartan para subrayar que este teorema conecta la torsión y la curvatura en la geometría de Cartan. En notación de forma se lee:

$$D \wedge T^a = R^a{}_b \wedge q^b. \quad (3.1)$$

Es una ecuación de 3-formas. Para demostrar esta ecuación, reinsertamos su lado izquierdo en el lado derecho. Insertar la definición de derivada covariante exterior da, para el lado izquierdo:

$$(D \wedge T^a)_{\mu\nu\rho} = (d \wedge T^a)_{\mu\nu\rho} + (\omega^a{}_b \wedge T^b)_{\mu\nu\rho}. \quad (3.2)$$

Como esto es una 3-forma antisimétrica, escribimos en notación de conmutador (ver sección 2.3):

$$D_{[\mu} T^a{}_{\nu\rho]} = \partial_{[\mu} T^a{}_{\nu\rho]} + \omega^a{}_{[\mu b} T^b{}_{\nu\rho]}. \quad (3.3)$$

En el ejemplo 2.8 vimos que las 6 permutaciones de índice de una 3-forma puede reducirse a 3 permutaciones cíclicas de los índices usando propiedades de antisimetría. Obtenemos así

$$\begin{aligned} D_{[\mu} T^a{}_{\nu\rho]} = & \partial_{\mu} T^a{}_{\nu\rho} + \partial_{\nu} T^a{}_{\rho\mu} + \partial_{\rho} T^a{}_{\mu\nu} \\ & + \omega^a{}_{\mu b} T^b{}_{\nu\rho} + \omega^a{}_{\nu b} T^b{}_{\rho\mu} + \omega^a{}_{\rho b} T^b{}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nótese que el índice inferior b de la conexión de espín no se incluye en las permutaciones porque es un índice latino del espacio tangente.

Insertando la definición de torsión

$$T^a_{\nu\mu} = \Gamma^a_{\mu\nu} - \Gamma^a_{\nu\mu} = q^a_{\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \right) \quad (3.5)$$

conduce entonces a

$$\begin{aligned} D_{[\mu} T^a_{\nu\rho]} = & \partial_{\mu} \left[q^a_{\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right) \right] + \partial_{\nu} \left[q^a_{\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} \right) \right] \\ & + \partial_{\rho} \left[q^a_{\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \right) \right] \\ & + \omega^a_{\mu b} q^b_{\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right) + \omega^a_{\nu b} q^b_{\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} \right) \\ & + \omega^a_{\rho b} q^b_{\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

El primer término entre paréntesis puede escribirse con ayuda del teorema de Leibniz:

$$\partial_{\mu} \left[q^a_{\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right) \right] = \left(\partial_{\mu} q^a_{\lambda} \right) \left(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right) + q^a_{\lambda} \left(\partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right). \quad (3.7)$$

Aplicando el postulado de la tetrada (2.236) en la forma

$$\partial_{\mu} q^a_{\lambda} = q^a_{\nu} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - q^b_{\lambda} \omega^a_{\mu b}. \quad (3.8)$$

entonces da

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \left[q^a_{\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right) \right] = & \left(q^a_{\nu} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - q^b_{\lambda} \omega^a_{\mu b} \right) \left(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right) \\ & + q^a_{\lambda} \left(\partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sumando el primer y cuarto término de (3.6), los términos con $\omega^a_{\mu b}$ se cancelan:

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \left[q^a_{\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right) \right] + \omega^a_{\mu b} q^b_{\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right) \\ = q^a_{\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right) + q^a_{\lambda} \left(\partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Juntando todos los términos de (3.6), obtenemos

$$\begin{aligned} D_{[\mu} T^a_{\nu\rho]} = & q^a_{\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right) + q^a_{\lambda} \left(\partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right) \\ & + q^a_{\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} \right) + q^a_{\lambda} \left(\partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} \right) \\ & + q^a_{\sigma} \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} \left(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \right) + q^a_{\lambda} \left(\partial_{\rho} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\rho} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Reordenando la suma:

$$\begin{aligned} D_{[\mu} T^a_{\nu\rho]} = & q^a_{\lambda} \left[\left(\partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} \right) + q^a_{\lambda} \left(\partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} - \partial_{\rho} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \right) + q^a_{\lambda} \left(\partial_{\rho} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right) \right] \\ & + q^a_{\sigma} \left[\Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ahora, en la primera línea, el índice ficticio λ se reemplaza con σ :

$$\begin{aligned} D_{[\mu} T^a_{\nu\rho]} = & q^a_{\sigma} \left[\left(\partial_{\mu} \Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} - \partial_{\nu} \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho} \right) + q^a_{\sigma} \left(\partial_{\nu} \Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} - \partial_{\rho} \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} \right) + q^a_{\sigma} \left(\partial_{\rho} \Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu} \right) \right] \\ & + \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} + \Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} + \Gamma^{\sigma}_{\rho\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Esta expresión puede compararse con la definición del tensor de Riemann 2.269 con cierta reenumeración:

$$R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} := \partial_\mu \Gamma^\sigma{}_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho}. \quad (3.14)$$

Obviamente (3.13) es la suma cíclica del tensor de Riemann:

$$D_{[\mu} T^a{}_{\nu\rho]} = q^a{}_\sigma R^\sigma{}_{[\rho\mu\nu]} = q^a{}_\sigma R^\sigma{}_{[\mu\nu\rho]}. \quad (3.15)$$

Según el proceso en las Ecs. (2.270-2.273) el tensor de Riemann puede escribirse como 2-forma

$$R^a{}_{b\nu\rho} = q^a{}_\sigma q^\mu{}_b R^\sigma{}_{\mu\nu\rho}. \quad (3.16)$$

Para traer el lado derecho de (3.15) a esta forma, extendemos el tensor de Riemann por un término unitario según la regla (2.207):

$$q^\tau{}_b q^b{}_\mu = \delta_\mu^\tau \quad (3.17)$$

y reasociamos los productos:

$$q^a{}_\sigma R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} = R^a{}_{\mu\nu\rho} = R^a{}_{\tau\nu\rho} (q^\tau{}_b q^b{}_\mu) \delta_\mu^\tau = (R^a{}_{\tau\nu\rho} q^\tau{}_b) q^b{}_\mu \delta_\mu^\tau = R^a{}_{b\nu\rho} q^b{}_\mu. \quad (3.18)$$

Re-introduciendo la suma cíclica tenemos

$$D_{[\mu} T^a{}_{\nu\rho]} = q^b{}_{[\mu} R^a{}_{b\nu\rho]} = R^a{}_{b[\mu\nu} q^b{}_{\rho]}. \quad (3.19)$$

que en notación de forma da la identidad de Cartan-Bianchi:

$$\boxed{D \wedge T^a = R^a{}_b \wedge q^b}. \quad (3.20)$$

■ **Ejemplo 3.1** Verificamos la identidad de Cartan-Bianchi por un ejemplo de código. Se computan todos los elementos requeridos según el ejemplo 2.15 (transformación a coordenadas polares esféricas). La identidad de Cartan-Bianchi (3.20) puede escribirse indexada según (3.19):

$$D_\mu T^a{}_{\nu\rho} + D_\nu T^a{}_{\rho\mu} + D_\rho T^a{}_{\mu\nu} = R^a{}_{b\mu\nu} q^b{}_\rho + R^a{}_{b\nu\rho} q^b{}_\mu + R^a{}_{b\rho\mu} q^b{}_\nu. \quad (3.21)$$

Resolviendo las derivadas covariantes según (3.4) esto finalmente da:

$$\begin{aligned} & \partial_\mu T^a{}_{\nu\rho} + \partial_\nu T^a{}_{\rho\mu} + \partial_\rho T^a{}_{\mu\nu} + \omega^a{}_{\mu b} T^b{}_{\nu\rho} + \omega^a{}_{\nu b} T^b{}_{\rho\mu} + \omega^a{}_{\rho b} T^b{}_{\mu\nu} \\ & = R^a{}_{b\mu\nu} q^b{}_\rho + R^a{}_{b\nu\rho} q^b{}_\mu + R^a{}_{b\rho\mu} q^b{}_\nu \end{aligned} \quad (3.22)$$

para cada índice triple (μ, ν, ρ) . El lado izquierdo y el derecho de esta ecuación se computan en el ejemplo de código [33]. La comparación muestra que ambos lados son iguales. Notamos que este resultado se obtiene para ambas formas de conexiones Gama (irrestringida o simetrizada). El tensor de torsión es el mismo para ambas formas, pero las conexiones Gama y de espín son diferentes. La identidad de Cartan-Bianchi se mantiene, a pesar de esta diferencia. ■

3.2 Identidad de Cartan-Evans

En la sección precedente se ha mostrado que la identidad de Cartan-Bianchi es una identidad rigurosa de la variedad de Riemann donde se define la teoría ECE. La *identidad de Cartan-Evans* [13, 14, 15] es una nueva identidad de la geometría diferencial, y es una contraparte de la identidad de Cartan-Bianchi en representación del tensor dual. Ambas identidades representarán las ecuaciones de campo ECE como se desarrollarán en siguientes capítulos. La identidad de Cartan-Bianchi es válida en variedad riemanniana, y la geometría de Cartan en la variedad riemanniana es

conocida por ser equivalente a la geometría de Riemann, considerada como la geometría de la filosofía natural (la física). Lo mismo se cumple para la identidad de Cartan-Evans, que se lee como

$$D \wedge \tilde{T}^a = \tilde{R}^a_b \wedge q^b. \quad (3.23)$$

Se introdujo el concepto del dual de Hodge al final de la sección 2.3, y el uso del dual de Hodge para las ecuaciones de Maxwell ya se comentó en el ejemplo 2.12. Introducimos aquí una conexión del dual de Hodge para su empleo en la derivada covariante del dual de Hodge. De allí en más la prueba de la identidad de Cartan-Evans sigue a la prueba de la identidad de Cartan-Bianchi. Como lo visto en secciones previas, sólo la parte antisimétrica de la conexión de Christoffel es esencial para la geometría de Cartan. Restringiendo la conexión a la parte antisimétrica, podemos definir el dual de Hodge de la conexión de Christoffel según la Ec.(2.114) mediante

$$\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu} := \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} |g|^{-1/2} \varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}, \quad (3.24)$$

donde $|g|^{-1/2}$ es la inversa de la raíz del módulo del determinante de la métrica, un factor de peso, por el que el símbolo de Levi-Civita $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ se vuelve el tensor unitario antisimétrico total, ver la sección 3.2. En (3.24) el símbolo de Levi-Civita aparece con índices mixtos superior e inferior. Por lo tanto, debemos elevar los dos primeros índices de acuerdo con (2.115):

$$\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} |g|^{-1/2} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}. \quad (3.25)$$

Como el tensor antisimétrico total (basado en el símbolo de Levi-Civita) no cambia su forma para ninguna transformación, usamos la métrica del espacio de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ con $|g| = 1$:

$$\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\alpha} \eta^{\sigma\beta} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}. \quad (3.26)$$

De esta manera se define una nueva conexión, $\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu}$. Se sabe que la conexión no transforma como tensor bajo la transformación general de coordenadas, pero la antisimetría en sus dos índices inferiores significa que su dual de Hodge puede definirse para cada índice superior de la conexión como en la ecuación anterior. La antisimetría de la conexión es la base para la identidad de Cartan-Evans, una identidad nueva y fundamental de la geometría diferencial. En teoría ECE se volverá la ecuación de campo inhomogénea, como ya se indicó para la homogénea de Maxwell en el ejemplo 2.12. Nótese que la torsión es un tensor, no así la conexión. Lo mismo vale para los duales de Hodge de la torsión y conexión. En la Ec.(2.147) se dedujo la ecuación fundamental del conmutador de la geometría de Riemann:

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]V^{\rho} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}V^{\sigma} - T^{\lambda}_{\mu\nu}D_{\lambda}V^{\rho}, \quad (3.27)$$

que se cumple para todo vector V^{ρ} de la variedad base. Ahora tomamos los duales de Hodge de cualquier lado de la Ec. (3.27) usando:

$$[D_{\mu}, D_{\nu}]_{\text{HD}} = \frac{1}{2} |g|^{-1/2} \varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu} [D_{\alpha}, D_{\beta}], \quad (3.28)$$

$$\tilde{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} |g|^{-1/2} \varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu} R^{\rho}_{\sigma\alpha\beta}, \quad (3.29)$$

$$\tilde{T}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} |g|^{-1/2} \varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu} T^{\lambda}_{\alpha\beta}. \quad (3.30)$$

Así:

$$[D_\alpha, D_\beta]_{\text{HD}} V^\rho = \tilde{R}^\rho_{\sigma\alpha\beta} V^\sigma - \tilde{T}^\lambda_{\alpha\beta} D_\lambda V^\rho. \quad (3.31)$$

Re-etiquetamos índices en la Ec. (3.31) para dar:

$$[D_\mu, D_\nu]_{\text{HD}} V^\rho = \tilde{R}^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma - \tilde{T}^\lambda_{\mu\nu} D_\lambda V^\rho. \quad (3.32)$$

El lado izquierdo de esta ecuación se define mediante:

$$[D_\mu, D_\nu]_{\text{HD}} V^\rho := D_\mu(D_\nu V^\rho) - D_\nu(D_\mu V^\rho) \quad (3.33)$$

donde las derivadas covariantes deben definirse por la conexión dual de Hodge definida en (3.24):

$$D_\mu V^\rho = \partial_\mu V^\rho + \Lambda^\rho_{\mu\lambda} V^\lambda, \quad (3.34)$$

$$D_\nu V^\rho = \partial_\nu V^\rho + \Lambda^\rho_{\nu\lambda} V^\lambda. \quad (3.35)$$

Resolviendo el álgebra de torsión y curvatura según las Ecs. (2.132, 2.134):

$$\tilde{T}^\lambda_{\mu\nu} = \Lambda^\lambda_{\mu\nu} - \Lambda^\lambda_{\nu\mu}, \quad (3.36)$$

$$\tilde{R}^\lambda_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \Lambda^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Lambda^\lambda_{\mu\rho} + \Lambda^\lambda_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma_{\nu\rho} - \Lambda^\lambda_{\nu\sigma} \Lambda^\sigma_{\mu\rho}. \quad (3.37)$$

Estos son los tensores de torsión y curvatura del dual de Hodge de la variedad de Riemann.

Ahora probamos la identidad de Cartan Evans como sigue. La identidad es:

$$D \wedge \tilde{T}^a = \tilde{R}^a_b \wedge q^b \quad (3.38)$$

o

$$d \wedge \tilde{T}^a + \omega^a_b \wedge \tilde{T}^b = \tilde{R}^a_b \wedge q^b. \quad (3.39)$$

En notación tensorial en la variedad de Riemann, las Ecs. (3.38, 3.39) devienen:

$$D_\mu \tilde{T}^a_{\nu\rho} + D_\rho \tilde{T}^a_{\mu\nu} + D_\nu \tilde{T}^a_{\rho\mu} = \tilde{R}^a_{\mu\nu\rho} + \tilde{R}^a_{\rho\mu\nu} + \tilde{R}^a_{\nu\rho\mu}, \quad (3.40)$$

que pueden expresarse con corchetes de permutación como

$$D_{[\mu} \tilde{T}^a_{\nu\rho]} = \tilde{R}^a_{[\mu\nu\rho]} = q^a_\sigma \tilde{R}^\sigma_{[\mu\nu\rho]}. \quad (3.41)$$

Esta ecuación es formalmente idéntica a (3.15) con las siguientes correspondencias:

$$T \rightarrow \tilde{T}, \quad (3.42)$$

$$R \rightarrow \tilde{R},$$

$$\Gamma \rightarrow \Lambda.$$

Por tanto, la prueba de la identidad de Cartan-Evans procede en completa analogía a la identidad de Cartan-Bianchi en la sección previa. Comenzando con el equivalente del lado izquierdo de la Ec. (3.15),

$$D_{[\mu} \tilde{T}^a_{\nu\rho]} = \partial_{[\mu} \tilde{T}^a_{\nu\rho]} + \omega^a_{[\mu b} \tilde{T}^b_{\nu\rho]}, \quad (3.43)$$

se deduce que esta expresión es igual a su equivalente del lado derecho de la Ec. (3.15):

$$q^a_\sigma \tilde{R}^\sigma_{[\mu\nu\rho]}. \quad (3.44)$$

Sigue la validez de las Ecs. (3.40 / 3.41) que es la contraparte de (3.19):

$$D_{[\mu} \tilde{T}^a_{\nu\rho]} = q^a_{\sigma} \tilde{R}^{\sigma}_{[\mu\nu\rho]}. \quad (3.45)$$

En la notación de formas, ésta es la identidad de Cartan-Evans:

$$\boxed{D \wedge \tilde{T}^a = \tilde{R}^a_b \wedge q^b}. \quad (3.46)$$

En la prueba de la identidad de Cartan-Bianchi se empleó el postulado de la tetrada (2.237). Para la identidad de Cartan-Evans esto debe usarse con la conexión Λ

$$\partial_{\mu} q^a_{\lambda} + q^b_{\lambda} \omega^a_{\mu b} - q^a_{\nu} \Lambda^{\nu}_{\mu\lambda} = 0. \quad (3.47)$$

Obviamente aquí la conexión de espín ω depende de la conexión Λ , no de la conexión Γ . (Hubiese sido óptimo emplear un símbolo diferente para ω , pero lo conservamos por conveniencia). En resumen, todos los elementos geométricos para la identidad de Cartan-Evans se obtienen del siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\Lambda^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} |g|^{-1/2} \eta^{\rho\alpha} \eta^{\sigma\beta} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}, \quad (3.48)$$

$$\omega^a_{\mu b} = q^a_{\nu} q^{\lambda}_{\mu} \Lambda^{\nu}_{\mu\lambda} - q^{\lambda}_{\mu} \partial_{\mu} q^a_{\lambda}, \quad (3.49)$$

$$\tilde{T}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Lambda^{\lambda}_{\mu\nu} - \Lambda^{\lambda}_{\nu\mu}, \quad (3.50)$$

$$\tilde{R}^{\lambda}_{\mu\nu\rho} = \partial_{\mu} \Lambda^{\lambda}_{\nu\rho} - \partial_{\nu} \Lambda^{\lambda}_{\mu\rho} + \Lambda^{\lambda}_{\mu\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\nu\rho} - \Lambda^{\lambda}_{\nu\sigma} \Lambda^{\sigma}_{\mu\rho}. \quad (3.51)$$

Alternativamente, los duales de Hodge de curvatura y torsión pueden computarse a partir de las cantidades originales (basadas en la conexión Γ):

$$\tilde{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} |g|^{-1/2} \varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu} R^{\rho}_{\sigma\alpha\beta}, \quad (3.52)$$

$$\tilde{T}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} |g|^{-1/2} \varepsilon^{\alpha\beta}_{\mu\nu} T^{\lambda}_{\alpha\beta}. \quad (3.53)$$

Las 2-forma de \tilde{T}^a y \tilde{R}^a_b se obtienen en forma usual, multiplicando con elementos de la tetrada:

$$\tilde{R}^a_{b\mu\nu} = q^a_{\rho} q^{\sigma}_{\mu} \tilde{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu}, \quad (3.54)$$

$$\tilde{T}^a_{\mu\nu} = q^a_{\lambda} \tilde{T}^{\lambda}_{\mu\nu}. \quad (3.55)$$

Una nueva inferencia de la identidad de Cartan-Evans es que hay una conexión de dualde Hodge en la variedad riemanniana en 4 dimensiones. Es un descubrimiento básico, y puede desarrollarse en matemática pura usando todo tipo de variedad. Pero ese desarrollo no es de interés para la física por la Navaja de Ockham, y la necesidad de evaluar una teoría contra datos experimentales.

■ **Ejemplo 3.2** Análogamente al ejemplo 3.1, verificamos la identidad de Cartan-Evans por código del mismo ejemplo de la tetrada, la transformación de coordenadas cartesianas a polares esféricas. La identidad de Cartan-Evans (3.46) puede expresarse con índices según (3.45):

$$D_{\mu} \tilde{T}^a_{\nu\rho} + D_{\nu} \tilde{T}^a_{\rho\mu} + D_{\rho} \tilde{T}^a_{\mu\nu} = \tilde{R}^a_{b\mu\nu} q^b_{\rho} + \tilde{R}^a_{b\nu\rho} q^b_{\mu} + \tilde{R}^a_{b\rho\mu} q^b_{\nu}. \quad (3.56)$$

Resolviendo las derivadas covariantes según (3.4) esto finalmente resulta

$$\begin{aligned} & \partial_{\mu} \tilde{T}^a_{\nu\rho} + \partial_{\nu} \tilde{T}^a_{\rho\mu} + \partial_{\rho} \tilde{T}^a_{\mu\nu} + \omega^a_{\mu b} \tilde{T}^b_{\nu\rho} + \omega^a_{\nu b} \tilde{T}^b_{\rho\mu} + \omega^a_{\rho b} \tilde{T}^b_{\mu\nu} \\ & = \tilde{R}^a_{b\mu\nu} q^b_{\rho} + \tilde{R}^a_{b\nu\rho} q^b_{\mu} + \tilde{R}^a_{b\rho\mu} q^b_{\nu} \end{aligned} \quad (3.57)$$

para cada índice triple (μ, ν, ρ) . El lado izquierdo y el derecho de esta ecuación se computan en los ejemplos de código [34, 35]. Hay sin embargo una diferencia. Mientras la identidad de Cartan-Bianchi se cumple para toda dimensión n de espacio riemanniano, introducir el dual de Hodge para la identidad de Cartan-Evans limita la dimensión de las 2-formas del dual a $n - 2$.

Así que, para obtener ecuaciones compatibles para ambas identidades, debemos usar $n = 4$ en el ejemplo, que lleva también a 2-formas de los duales de Hodge. Debemos extender la matriz de transformación α (Ec. 2.213) en el 0-componente (coordenada temporal), que resulta en

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ 0 & \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.58)$$

La coordenada temporal permanece inalterada por la transformación. El tensor de la métrica n -dimensional \mathbf{g} puede computarse desde la tétrada por (2.204):

$$g_{\mu\nu} = n q^a{}_{\mu} q^b{}_{\nu} \eta_{ab}. \quad (3.59)$$

Obtenemos el tensor de la métrica:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

que tiene el módulo del determinante

$$|g| = r^4 \sin^2 \theta. \quad (3.61)$$

El símbolo de Levi-Civita $\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ en cuatro dimensiones puede computarse con

$$\varepsilon_{a_0, a_1, a_2, a_3} = \text{sig}(a_3 - a_0) \text{sig}(a_3 - a_1) \text{sig}(a_3 - a_2) \text{sig}(a_2 - a_0) \text{sig}(a_2 - a_1) \text{sig}(a_1 - a_0). \quad (3.62)$$

Ahora están todos los elementos para evaluar las Ecs. (3.48-3.51). Con éstas, pueden evaluarse ambos lados de la Ec. (3.56), como en el ejemplo 3.1. Lo hacemos en dos etapas. En la primera repetimos los cálculos del ejemplo de arriba (identidad de Cartan-Bianchi) en 4 dimensiones [34]. Un resultado interesante es que la conexión Gama, obtenida con condiciones adicionales de antisimetría, tiene sólo 4 parámetros libres. Esto es similar a la teoría de Einstein, donde la métrica simétrica sólo se determina hasta 4 parámetros, que pueden elegirse libremente y representan "libre elección de coordenadas". En geometría de Cartan, la métrica se define en forma única de la tétrada. La "elección libre" aparece en las conexiones. Por ende, esta elección también está allí en la torsión y curvatura, y finalmente en los teoremas fundamentales. Algunos resultados del código [34] son:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{12} &= A_4 r^2 \\ \Gamma^3_{01} &= -\frac{A_2}{r^2 \sin^2 \theta} \\ \omega^{(2)}_{1(3)} &= \frac{A_3 \cos \phi}{r^2} \\ T^2_{13} &= \frac{2A_3}{r^2} \\ R^0_{213} &= \frac{A_1 r \sin \theta - A_2 \cos \theta}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Como en el ejemplo precedente, la comparación entre ambos lados de la identidad de Cartan-Bianchi muestra que ambos lados son iguales, en este caso para cuatro dimensiones.

En el segundo ejemplo de código [35], se computan las conexiones del dual de Hodge Λ y ω y los tensores \tilde{T} , \tilde{R} y sus 2-formas correspondientes. Obtenemos por ejemplo, para las conexiones duales de Hodge y tensores:

$$\begin{aligned}
 \Lambda^0_{03} &= \frac{A_4}{\sin^2 \theta} & (3.64) \\
 \Lambda^3_{01} &= \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \\
 \omega^{(2)}_{1(3)} &= \frac{\sin \phi (r^2 \cos \theta \sin^2 \theta + A_2 \sin \theta - A_1 r \cos \theta)}{r^3 \sin \theta} \\
 \tilde{T}^2_{13} &= 0 \\
 \tilde{T}^2_{02} &= -\frac{2A_3}{r^4 \sin^2 \theta} \\
 \tilde{R}^0_{213} &= 0 \\
 \tilde{R}^0_{202} &= -\frac{2A_2 r^2 \cos \theta \sin \theta - A_2^2}{r^4 \sin^4 \theta}
 \end{aligned}$$

Insertando estas cantidades en ambos lados de la identidad de Cartan-Evans, vemos que ambos lados son iguales, la identidad se mantiene en el ejemplo elegido. ■

3.3 Formas alternas de identidades de Cartan-Bianchi y de Cartan-Evans

3.3.1 Identidad de Cartan-Evans

Se vió que la identidad de Cartan-Evans se basa en la definición fundamental del dual de Hodge de torsión y curvatura, y suma tres de ellos en permutación cíclica.

Empleando la definición

$$\tilde{T}^a_{\mu\nu} = q^a_{\lambda} \tilde{T}^{\lambda}_{\mu\nu} \quad (3.65)$$

se deduce que:

$$D_{\mu} \tilde{T}^a_{\nu\rho} = (D_{\mu} q^a_{\kappa}) \tilde{T}^{\kappa}_{\nu\rho} + q^a_{\kappa} D_{\mu} \tilde{T}^{\kappa}_{\nu\rho} \quad (3.66)$$

empleando la regla de Leibniz. Usando el postulado de la tetrada:

$$D_{\mu} q^a_{\kappa} = 0 \quad (3.67)$$

encontramos que:

$$D_{\mu} \tilde{T}^a_{\nu\rho} = q^a_{\kappa} D_{\mu} \tilde{T}^{\kappa}_{\nu\rho} \quad (3.68)$$

Se deduce entonces que:

$$D_{\mu} \tilde{T}^{\kappa}_{\nu\rho} + D_{\nu} \tilde{T}^{\kappa}_{\rho\mu} + D_{\rho} \tilde{T}^{\kappa}_{\mu\nu} = \tilde{R}^{\kappa}_{\mu\nu\rho} + \tilde{R}^{\kappa}_{\nu\rho\mu} + \tilde{R}^{\kappa}_{\rho\mu\nu} \quad (3.69)$$

que es la identidad de Cartan-Evans escrita sólo en la variedad base. Esta ecuación puede re-exprimirse como:

$$D_{\mu} T^{\kappa\mu\nu} = R^{\kappa}_{\mu}{}^{\mu\nu}. \quad (3.70)$$

La forma más sencilla de ver esto es tomando un ejemplo particular:

$$D_1 \tilde{T}_{23}^\kappa + D_3 \tilde{T}_{12}^\kappa + D_2 \tilde{T}_{31}^\kappa = \tilde{R}_{123}^\kappa + \tilde{R}_{312}^\kappa + \tilde{R}_{231}^\kappa \quad (3.71)$$

y tomar el término del dual de Hodge con índices superiores según la Ec. (2.117). Los factores constantes se cancelan. Para el símbolo de Levi-Civita se mantiene:

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \quad (3.72)$$

de manera que también se cancela el cambio de signo. Más aún, para un doble dual de Hodge de un tensor T se mantiene

$$\tilde{\tilde{T}} = \pm T \quad (3.73)$$

de manera que también cualquier cambio de signo de esta clase se cancela. Tomamos el dual de Hodge de (3.71), término a término. El símbolo de Levi-Civita tiene la propiedad de que en las expresiones

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha\beta}^\kappa \quad (3.74)$$

los pares de índices $(\mu\nu)$ y $(\alpha\beta)$ son mutuamente excluyentes:

$$\begin{aligned} \mu &\neq \nu, & \alpha &\neq \beta, \\ \mu &\notin \{\alpha, \beta\}, \\ \nu &\notin \{\alpha, \beta\}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

En total obtenemos para el ejemplo del dual de Hodge de (3.71):

$$D_1 T^{\kappa 01} + D_2 T^{\kappa 02} + D_3 T^{\kappa 03} = R^{\kappa 1 01} + R^{\kappa 2 02} + R^{\kappa 3 03} \quad (3.76)$$

que es un ejemplo de la Ec. (3.70), la forma alternativa de la identidad de Cartan-Evans:

$$\boxed{D_\mu T^{\kappa\mu\nu} = R^{\kappa \mu\nu}}. \quad (3.77)$$

3.3.2 Identidad de Cartan-Bianchi

La Ec. (3.77) es el formato más útil de la identidad de Cartan-Evans. También la identidad de Cartan-Bianchi puede re-expresarse en este formato. De la Ec. (3.19) se obtiene:

$$D_\mu T^{\kappa}_{\nu\rho} + D_\nu T^{\kappa}_{\rho\mu} + D_\rho T^{\kappa}_{\mu\nu} = R^{\kappa}_{\mu\nu\rho} + R^{\kappa}_{\nu\rho\mu} + R^{\kappa}_{\rho\mu\nu} \quad (3.78)$$

que es idéntica a (3.69) excepto que éstos son los tensores originales en vez de los duales de Hodge. De manera que la misma derivación de arriba conduce a la forma alternativa de la identidad de Cartan-Bianchi:

$$\boxed{D_\mu \tilde{T}^{\kappa\mu\nu} = \tilde{R}^{\kappa \mu\nu}}. \quad (3.79)$$

Deberá notarse que en las formas contravariantes de arriba de ambas identidades, el dual de Hodge y los tensores originales se intercambian, comparados con las formas covariantes (3.19) y (3.45).

3.3.3 Consecuencias de las identidades

Al final de esta sección investigamos las implicaciones de antisimetría de la conexión Gama en la geometría de Cartan. La conexión Gama debe tener al menos partes antisimétricas con

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = -\Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \quad (3.80)$$

Si $\mu = \nu$ en la conexión Gama, entonces desaparece el conmutador, como también lo hacen los tensores de torsión y curvatura. Si sólo hay partes simétricas en la conexión:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \neq ? 0 \quad (3.81)$$

entonces desaparece la torsión, conduciendo al caso especial de (3.77):

$$R^\kappa{}_\mu{}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.82)$$

Se ha mostrado por álgebra computacional [16, 17] que todas las métricas de la ecuación de campo de Einstein, en presencia de materia, dan el resultado erróneo

$$R^\kappa{}_\mu{}^{\mu\nu} \neq ? 0, \quad (3.83)$$

$$D_\mu T^{\kappa\mu\nu} = ? 0. \quad (3.84)$$

Es una contradicción respecto de propiedades básicas de geometría de Cartan, el superconjunto de la geometría riemanniana, y por lo tanto la Ec. (3.77) es una restricción para teorías como la relatividad einsteiniana, que se basan en geometría riemanniana. El error se traslada a través de toda la obsoleta e incorrecta cosmología, que debieran de descartar los académicos. Esta inconsistencia se perpetuó acriticamente durante casi un siglo. Esto significa que la cosmología del modelo establecido de la física no tiene sentido, y debiera de ser reemplazado por la cosmología ECE, basada en la torsión.

3.4 Otras identidades

Hay algunas otras identidades que no desempeñan un papel tan importante para las ecuaciones de campo de la teoría ECE, pero que representan nuevos conceptos en la geometría de Cartan. Se obtuvieron durante el desarrollo de la teoría ECE. Las presentamos a continuación, parcialmente sin demostraciones, las cuales pueden hallarse en la literatura.

3.4.1 Identidad de torsión de Evans (primera identidad de Evans)

A partir de la identidad de Cartan-Bianchi puede derivarse otra identidad, que contiene sólo términos de torsión. Esta es la identidad de torsión de Evans [14]. Establece explícitamente

$$T^\kappa_{\lambda\nu} T^\lambda_{\sigma\mu} + T^\kappa_{\lambda\mu} T^\lambda_{\nu\sigma} + T^\kappa_{\lambda\sigma} T^\lambda_{\mu\nu} = 0 \quad (3.85)$$

y puede expresarse en forma abreviada con corchetes de permutación:

$$\boxed{T^\kappa_{\lambda[\nu} T^\lambda_{\sigma\mu]} = 0}. \quad (3.86)$$

La identidad puede re-expresarse con notación de forma a

$$T^\kappa_\lambda \wedge T^\lambda = 0, \quad (3.87)$$

o multiplicando con $q^a{}_\kappa$:

$$\boxed{T^a_\lambda \wedge T^\lambda = 0}. \quad (3.88)$$

Aquí, T^a_λ es una 1-forma y T^λ es una 2-forma, creando una 3-forma del lado izquierdo. La demostración se basa en insertar las definiciones de torsión en la identidad de Cartan-Bianchi y puede hallarse en la literatura [14].

3.4.2 Identidad de Jacobi

La identidad de Jacobi [18] es una identidad exacta en teoría de campo y relatividad general. Es una identidad de operador, que aplica a derivadas covariantes y generadores de grupos [19] por igual. Rara vez se demuestra en detalle, por lo que se incluye ésta a continuación. La identidad de Jacobi es una suma permutada de tres derivadas covariantes:

$$\boxed{[D_\rho, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\nu, [D_\rho, D_\mu]] + [D_\mu, [D_\nu, D_\rho]] = 0} . \quad (3.89)$$

Para la demostración, expandemos los conmutadores del lado izquierdo:

$$\begin{aligned} L.H.S &= [D_\rho, D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu] + [D_\nu, D_\rho D_\mu - D_\mu D_\rho] + [D_\mu, D_\nu D_\rho - D_\rho D_\nu] \\ &= D_\rho(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) - (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)D_\rho \\ &\quad + D_\nu(D_\rho D_\mu - D_\mu D_\rho) - (D_\rho D_\mu - D_\mu D_\rho)D_\nu \\ &\quad + D_\mu(D_\nu D_\rho - D_\rho D_\nu) - (D_\nu D_\rho - D_\rho D_\nu)D_\mu \end{aligned} \quad (3.90)$$

y esta expansión se considera una expansión de álgebra que suma cero:

$$\begin{aligned} L.H.S &= D_\rho D_\mu D_\nu - D_\rho D_\nu D_\mu - D_\mu D_\nu D_\rho + D_\nu D_\mu D_\rho \\ &\quad + D_\nu D_\rho D_\mu - D_\nu D_\mu D_\rho - D_\rho D_\mu D_\nu + D_\mu D_\rho D_\nu \\ &\quad + D_\mu D_\nu D_\rho - D_\mu D_\rho D_\nu - D_\nu D_\rho D_\mu + D_\rho D_\nu D_\mu \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.91)$$

Q.E.D. La identidad de Jacobi también puede expresarse de una forma alternativa:

$$\boxed{[[D_\mu, D_\nu], D_\rho] + [[D_\rho, D_\mu], D_\nu] + [[D_\nu, D_\rho], D_\mu] = 0} . \quad (3.92)$$

3.4.3 Identidad de Bianchi-Cartan-Evans

En relatividad general einsteiniana, se emplea la segunda identidad de Bianchi, que se obtiene de la derivada covariante de la primera identidad de Bianchi. En este tipo de teoría se ignora la torsión. El mismo procedimiento puede aplicarse a la identidad de Cartan-Bianchi de la geometría de Cartan, que contiene torsión y curvatura. Resulta la *identidad de Bianchi-Cartan-Evans* [20-22]:

$$\boxed{D_\mu D_\lambda T_{\nu\rho}^\kappa + D_\rho D_\lambda T_{\mu\nu}^\kappa + D_\nu D_\lambda T_{\rho\mu}^\kappa = D_\mu R^\kappa_{\lambda\nu\rho} + D_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} + D_\nu R^\kappa_{\lambda\rho\mu}} . \quad (3.93)$$

La demostración se efectuó por primera vez en el documento UFT 88 [20] que es el más leído de la teoría ECE. Pueden producirse otras dos identidades por permutación cíclica de (μ, ν, ρ) . La Ec. (3.93) es la correcta "segunda identidad de Bianchi" aumentada por torsión. En teoría einsteiniana se emplea la versión incorrecta

$$D_\mu R^\kappa_{\lambda\nu\rho} + D_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} + D_\nu R^\kappa_{\lambda\rho\mu} =? 0 \quad (3.94)$$

Esto se obtiene a partir de (3.93) omitiendo arbitrariamente la torsión. La ecuación de campo de Einstein-Hilbert se obtiene de esta erróneamente truncada "segunda identidad de Bianchi" [20]. O sea que todas las soluciones de la ecuación de campo de Einstein-Hilbert son inconsistentes.

Nótese que la identidad de Bianchi-Cartan-Evans no da información adicional en comparación con la identidad de Cartan-Bianchi, porque se deduce de ésta última por diferenciación y, por lo tanto, no es independiente.

3.4.4 Identidad de Jacobi-Cartan-Evans

La identidad de Jacobi puede emplearse para obtener otra identidad. Cuando los términos de la identidad de Cartan Bianchi se insertan en la identidad de Jacobi (3.89), resulta la relación

$$\begin{aligned}
& ([D_\rho, [D_\mu, D_\nu]] + [D_\nu, [D_\rho, D_\mu]] + [D_\mu, [D_\nu, D_\rho]]) V^\kappa \\
&= (D_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} + D_\nu R^\kappa_{\lambda\rho\mu} + D_\mu R^\kappa_{\lambda\nu\rho}) V^\lambda \\
&\quad - (T^\lambda_{\mu\nu} [D_\rho, D_\lambda] + T^\lambda_{\rho\mu} [D_\nu, D_\lambda] + T^\lambda_{\nu\rho} [D_\mu, D_\lambda]) V^\kappa \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.95}$$

donde la identidad de Jacobi se ha aplicado a un vector arbitrario V^κ de la variedad base. Debido a que la identidad de Jacobi suma cero, se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned}
& (D_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} + D_\nu R^\kappa_{\lambda\rho\mu} + D_\mu R^\kappa_{\lambda\nu\rho}) V^\lambda \\
&= (T^\lambda_{\mu\nu} [D_\rho, D_\lambda] + T^\lambda_{\rho\mu} [D_\nu, D_\lambda] + T^\lambda_{\nu\rho} [D_\mu, D_\lambda]) V^\kappa.
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Transformaciones adicionales, descritas en [22], dan como resultado

$$\boxed{D_\rho R^\kappa_{\lambda\mu\nu} + D_\nu R^\kappa_{\lambda\rho\mu} + D_\mu R^\kappa_{\lambda\nu\rho} = T^\alpha_{\mu\nu} R^\kappa_{\lambda\rho\alpha} + T^\alpha_{\rho\mu} R^\kappa_{\lambda\nu\alpha} + T^\alpha_{\nu\rho} R^\kappa_{\lambda\mu\alpha}}, \tag{3.97}$$

que se denomina la *identidad de Jacobi-Cartan-Evans*.



Bibliografía

Capítulo 1

- [1] M. W. Evans, “Generally Covariant Unified Field Theory: the Geometrization of Physics” (Abramis Academic, 2005 al presente), vols. 1 a 4, vol. 5 en prep. (Docum. 71 a 93 en www.aias.us). (Hay trad. al castellano en este portal).
- [2] L. Felker, “The Evans Equations of Unified Field Theory” (Abramis Acad., 2007). (Hay trad.)
- [3] Unified Field Theory (UFT) Section of www.aias.us. (Hay trad. al castellano en el portal.)
- [4] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt, K. Pendergast, “Criticisms of the Einstein Field Equation” (Cambridge International Science Publishing, 2011)

Capítulo 2

- [5] S. Carroll, “Spacetime and Geometry: Introduction to General Relativity” (Pearson Education Limited, 2014); manuscrito en línea: <https://arxiv.org/pdf/gr-qc/9712019.pdf>
- [6] P. A. M. Dirac, “General Theory of Relativity” (Princeton Landmarks in Mathematics & Physics, Wiley 1975 / Princeton University Press 1996).
- [7] R. M. Wald, “General Relativity” (University Chicago Press, 1984).
- [8] R. M. Ryder, “Introduction to General Relativity” (Cambridge University Press, 2009).
- [9] T. Fließbarch, “Allgemeine Relativitätstheorie” (Spektrum Akademischer Verlag, 1995).
- [10] H.M. Khudaverdian, “Riemannian Geometry” (draft of Lecture Notes of H.M. Khudaverdian. Manchester, 20-th May 2011); manuscrito en línea: <http://www.maths.manchester.ac.uk/~khudian/Teaching/Geometry/GeomRim11/riemgeom11.pdf>
- [11] Docum. 142, Unified Field Theory. Sección UFT de www.aias.us. (Hay trad. en el portal).

Capítulo 3

- [12] Apéndice C de Doc. 15, Unified Field Theory. Sección UFT de www.aias.us.
- [13] Paper 104, Unified Field Theory. Sección UFT de www.aias.us.
- [14] Paper 109, Unified Field Theory. Sección UFT de www.aias.us. (hay trad.)
- [15] Paper 137, Unified Field Theory. Sección UFT de www.aias.us. (hay trad.)
- [16] Paper 93, Unified Field Theory. Sección UFT de www.aias.us.
- [17] Myron W. Evans, Stephen J. Crothers, Horst Eckardt, Kerry Pendergast, “Criticism of the Einstein Field Equation” (Cambridge International Science Publishing Ltd 2011), preprints en www.researchgate.net y Docum. 109, Unified Field Theory. Sección UFT de www.aias.us.
- [18] Docum. 99, Unified Field Theory. Sección UFT de www.aias.us. (hay trad.)
- [19] L. H. Ryder, “Quantum Field Theory” (Cambridge Univ. Press, 1996, 2nd.Ed.)
- [20] Docum. 88, Unified Field Theory (UFT). Sección UFT de www.aias.us. (hay trad.)
- [21] Docum.255, Unified Field Theory (UFT). Sección UFT de www.aias.us. (hay trad.)
- [22] Docum.313, Unified Field Theory (UFT). Sección UFT de www.aias.us. (hay trad.)

Ejemplos para álgebra computacional (**Maxima**)

- [23] Ex2.4.wxm
- [24] Ex2.5.wxm
- [25] Ex2.10.wxm
- [26] CH02-diag-metric.wxm
- [27] CH02-nondiag-metric.wxm
- [28] Ex2.11.wxm
- [29] Ex2.12.wxm
- [30] Ex2.13.wxm
- [31] Ex2.14.wxm
- [32] Ex2.15.wxm
- [33] Ex3.1.wxm
- [34] Ex3.2a.wxm
- [35] Ex3.2b.wxm