

# El camino de cálculo completo a través de la geometría de Cartan.

H. Eckardt \*  
A.I.A.S. y UPITEC

([www.aias.us](http://www.aias.us), [www.atomicprecision.com](http://www.atomicprecision.com), [www.upitec.org](http://www.upitec.org))

Documento UFT 439

Agosto 15, 2019

Traducción: Alex Hill ([www.et3m.net](http://www.et3m.net))

## Resumen

Durante el desarrollo de la teoría ECE, se tocaron varios aspectos de la geometría de Cartan. En este artículo presentamos la gran imagen, o sea cómo evoluciona la física en toda la extensión de la geometría de Cartan. La tétrada corresponde a un dado potencial, y a lo largo de varias etapas se computan toda clase de conexiones, hasta llegar a las formas de torsión, que corresponden a campos de fuerza. Reunimos todas las ecuaciones relevantes de la geometría de Cartan. El potencial se simplifica mediante el empleo de una novedosa restricción a la polarización. Esta simplificación se traduce al espacio tangente de la geometría de Cartan, al seleccionar los vectores unitarios de este espacio que fuesen paralelos a la variedad base. Esto conduce a una matriz de la tétrada diagonal. Se incluyen ejemplos para algunos sistemas físicos. En particular, se encontró una nueva justificación para el campo  $B^{(3)}$  de Evans.

**Palabras clave:** Geometría de Cartan, relatividad general, teoría ECE, electrodinámica.

## 1 Introducción

El desarrollo de la teoría ECE se basa en la geometría de Cartan. Elementos de geometría se interpretan como cantidades físicas, al aplicar los axiomas ECE a la geometría. Esto consiste básicamente en multiplicar las cantidades geométricas por constantes con dimensiones físicas, a fin de obtener ecuaciones de la física. Esto se efectuó con mucho detalle durante el transcurso del desarrollo de la teoría ECE [1]-[6]. Todos los documentos se concentran en aspectos especiales. En este artículo abarcamos todo el espectro de la geometría de Cartan. Comenzando con la tétrada, que corresponde a los potenciales físicos, finalizamos con cantidades electromagnéticas o de campo gravitacional. El gran avance es que mediante este camino toda clase de tensores y conexiones geométricas son computables. La dificultad previa fue hallar, para un dado problema, hallar las conexiones de Christoffel ( $\gamma$ ). Esto apenas si

---

\*email: [mail@horst-eckardt.de](mailto:mail@horst-eckardt.de)

resulta posible sin herramientas matemáticas. En este documento empleamos álgebra computacional para resolver las ecuaciones para las conexiones gamma y de espín.

Las ecuaciones son de tipo algebraico. Para las conexiones gamma, debe de resolverse un sistema lineal de ecuaciones. Así, la complejidad se introduce en el desarrollo no mediante matemáticas complicadas, sino mediante el gran número de ecuaciones y variables a manejar. Esta es la razón por la que, en teoría einsteiniana, sólo podían manejarse en el pasado sistemas muy sencillos (la mayoría de ellos con simetría esférica).

Una segunda dificultad surge de que la geometría de Cartan introduce los asíllamados índices de polarización. Estos índices surgen del empleo del espacio tangente de la variedad base de Cartan. Así, un vector de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  deviene un vector indexado  $\mathbf{E}^a$  en teoría ECE. Se han desarrollado varios métodos para librarse de este índice en los casos de situaciones físicas, como por ejemplo utilizando sólo un índice o promediando todos los valores de índices [7]. Aquí introducimos otro método: Suponemos que los vectores base de la variedad base y el espacio tangente son paralelos. Entonces la tétrada se reduce a una matriz diagonal y el índice de polarización es idéntico al índice de coordenadas.

En la sección 2 resumimos las ecuaciones de la teoría ECE empleadas, y en la sección 3 incluimos algunos ejemplos del método global. Más aun, en la sección 3 del libro de texto ECE [8], pueden hallarse más ejemplos matemáticos.

## 2 El camino completo a través de la geometría de Cartan

### 2.1 Listando las ecuaciones

Recordamos que los axiomas ECE conectan el potencial electromagnético  $A_\mu^a$  y el tensor de campo electromagnético  $F^a_{\mu\nu}$  con la tétrada  $q_\mu^a$  y el tensor de torsión  $T^a_{\mu\nu}$ :

$$A_\mu^a := A^{(0)} q_\mu^a, \quad (1)$$

$$F^a_{\mu\nu} := A^{(0)} T^a_{\mu\nu}, \quad (2)$$

o en notación de formas:

$$A^a := A^{(0)} q^a, \quad (3)$$

$$F^a := A^{(0)} T^a, \quad (4)$$

donde  $A^{(0)}$  es una constante que introduce unidades físicas. Dado que  $A_\mu^a$  es un potencial vectorial,  $A^{(0)}$  tiene las unidades de  $Vs/m$ . La torsión se define en unidades de  $1/m$  y, en consecuencia,  $F$  tiene unidades de un campo magnético (Tesla o  $Vs/m^2$ ).  $q^a$  es una 1-forma y  $T^a$  es una 2-forma. Correspondientemente, el potencial  $A^a$  es una 1-forma y el tensor de campo  $F^a$  es una 2-forma de la geometría de Cartan, que consiste de los componentes de campo  $\mathbf{E}^a$  y  $\mathbf{B}^a$ .

Iniciamos la parte computacional con un potencial dado, de manera que se conocen los elementos de la tétrada.

De la tétrada, computamos el tensor de la métrica  $g_{\mu\nu}$  y su contra-parte contravariante  $g^{\mu\nu}$ , que, en terminología algebraica, es la matriz inversa de  $g_{\mu\nu}$ :

$$g_{\mu\nu} = n q_\mu^a q_\nu^b \eta_{ab}, \quad (5)$$

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{n} q^\mu_a q^\nu_b \eta^{ab}. \quad (6)$$

$\eta^{ab}$  es la métrica del espacio de Minkowski, y  $n$  es la dimensión espacial, aquí es 4.

La compatibilidad métrica nos permite determinar la conexión  $\Gamma$  a partir del sistema de ecuaciones lineales

$$D_\sigma g_{\mu\nu} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} g_{\mu\lambda} = 0. \quad (7)$$

Como se comentó en detalle en los documentos ECE, la conexión  $\Gamma$  es asimétrica en sus índices inferiores, y las partes relevantes son las partes antisimétricas en los elementos no diagonales. Por lo tanto, requerimos explícitamente

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = -\Gamma^\rho_{\nu\mu} \quad (8)$$

para todo  $\mu \neq \nu$ . Entonces la solución es única hasta cuatro constantes indeterminadas, para las cuales deben efectuarse selecciones adecuadas en aplicaciones específicas.

La conexión de espín es computable desde los elementos de la tétrada y la conexión  $\Gamma$ :

$$\omega^a_{\mu b} = q^a_\nu q^\lambda_b \Gamma^\nu_{\mu\lambda} - q^\lambda_b \partial_\mu q^a_\lambda. \quad (9)$$

Con estos prerequisites, podemos computar los tensores de curvatura y torsión:

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\rho} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} \Gamma^\sigma_{\mu\rho}, \quad (10)$$

$$T^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\mu}. \quad (11)$$

Para la teoría ECE, necesitamos las formas de curvatura y torsión, que se obtienen de los tensores de arriba mediante

$$R^a_{b\mu\nu} = q^a_\rho q^\sigma_b R^\rho_{\sigma\mu\nu}, \quad (12)$$

$$T^a_{\mu\nu} = q^a_\lambda T^\lambda_{\mu\nu}. \quad (13)$$

Dado que los componentes de los vectores refieren a los elementos contravariantes en el tensor de campo de fuerza  $F$ , debemos elevar los índices en  $T$ :

$$T^{a\mu\nu} = \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} T^a_{\rho\sigma}, \quad (14)$$

con la métrica inversa de Minkowski, que es idéntica a la forma covariante:

$$\eta^{ab} = \eta_{ab}. \quad (15)$$

A partir de la teoría ECE, la forma de campo electromagnético  $F$  es

$$F^{a\mu\nu} = \begin{bmatrix} F^{a00} & F^{a01} & F^{a02} & F^{a03} \\ F^{a10} & F^{a11} & F^{a12} & F^{a13} \\ F^{a20} & F^{a21} & F^{a22} & F^{a23} \\ F^{a30} & F^{a31} & F^{a32} & F^{a33} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -E^{a1}/c & -E^{a2}/c & -E^{a3}/c \\ E^{a1}/c & 0 & -B^{a3} & B^{a2} \\ E^{a2}/c & B^{a3} & 0 & -B^{a1} \\ E^{a3}/c & -B^{a2} & B^{a1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Con la Ec. (2) podemos identificar

$$A^{(0)} \begin{bmatrix} T^{a00} & T^{a01} & T^{a02} & T^{a03} \\ T^{a10} & T^{a11} & T^{a12} & T^{a13} \\ T^{a20} & T^{a21} & T^{a22} & T^{a23} \\ T^{a30} & T^{a31} & T^{a32} & T^{a33} \end{bmatrix} = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} 0 & -E^{a1} & -E^{a2} & -E^{a3} \\ E^{a1} & 0 & -cB^{a3} & cB^{a2} \\ E^{a2} & cB^{a3} & 0 & -cB^{a1} \\ E^{a3} & -cB^{a2} & cB^{a1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

que relaciona los componentes de  $\mathbf{E}^a$  y  $\mathbf{B}^a$  directamente con ciertos elementos de torsión:

$$\begin{bmatrix} E^{a1} \\ E^{a2} \\ E^{a3} \end{bmatrix} = c A^{(0)} \begin{bmatrix} T^{a10} \\ T^{a20} \\ T^{a30} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} B^{a1} \\ B^{a2} \\ B^{a3} \end{bmatrix} = A^{(0)} \begin{bmatrix} -T^{a23} \\ T^{a13} \\ -T^{a12} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Además de la derivación anterior, deben computarse las cantidades de los duales de Hodge. Los duales de Hodge de  $F$  tienen las mismas dimensiones que  $F$ , pero esto se cumple sólo en 4 dimensiones. Por lo tanto, restringimos nuestra consideración a un espacio de 4 dimensiones. Como se obtuvo en [7], el dual de la conexión  $\Gamma$ , llamado  $\Lambda$ , y la conexión de espín resultante  $\omega_{(\Lambda)}$  son

$$\Lambda^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} |g|^{-1/2} g^{\rho\alpha} g^{\sigma\beta} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}, \quad (20)$$

$$\omega_{(\Lambda)}^a{}_{\mu b} = q^a{}_\nu q^\lambda{}_b \Lambda^\nu{}_{\mu\lambda} - q^\lambda{}_b \partial_\mu q^a{}_\lambda, \quad (21)$$

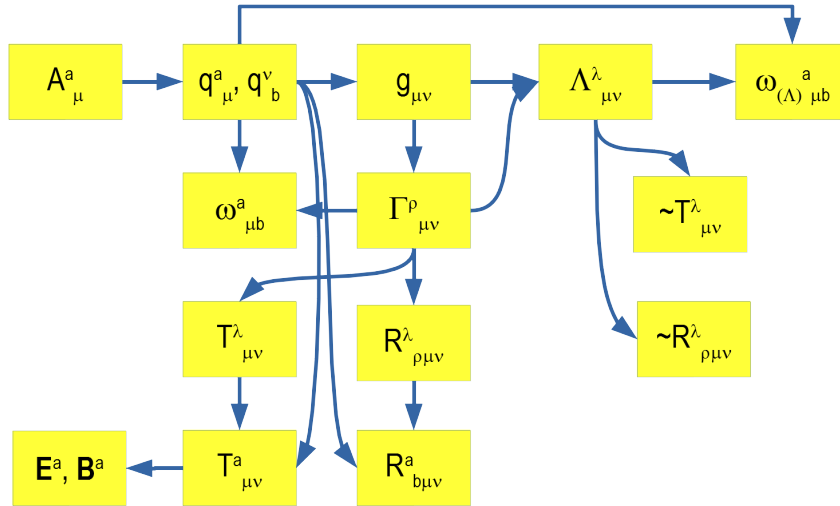


Figura 1: Interdependencias de variables para la geometría de Cartan.

con  $g$  siendo el determinante del tensor de la métrica. El dual de Hodge de la curvatura y la torsión son, en analogía con sus definiciones con la conexión  $\Gamma$ :

$$\tilde{R}^{\lambda}_{\mu\nu\rho} = \partial_{\mu}\Lambda^{\lambda}_{\nu\rho} - \partial_{\nu}\Lambda^{\lambda}_{\mu\rho} + \Lambda^{\lambda}_{\mu\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\nu\rho} - \Lambda^{\lambda}_{\nu\sigma}\Lambda^{\sigma}_{\mu\rho}, \quad (22)$$

$$\tilde{T}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Lambda^{\lambda}_{\mu\nu} - \Lambda^{\lambda}_{\nu\mu}. \quad (23)$$

Así, todas las variables relevantes de la geometría de Cartan pueden computarse con las Ecs. (5-14), y los campos de fuerza resultantes con las Ecs. (18-19). La tetrada, específicamente el potencial, debe darse como alimentación. La interdependencia entre variables se describe en la Fig.1 bajo la forma de una gráfica.

## 2.2 Simplificación del 4-potencial

En teoría ECE, el 4-vector del potencial viene dado por

$$A^{a\mu} = \begin{bmatrix} \frac{\phi^a}{c} \\ A^{a1} \\ A^{a2} \\ A^{a3} \end{bmatrix} \quad (24)$$

donde  $\phi^a$  es el potencial escalar y  $A^{a1}, A^{a2}, A^{a3}$  son los componentes del potencial vectorial, que en notación vectorial puede expresarse como

$$\mathbf{A}^a = \begin{bmatrix} A^{a1} \\ A^{a2} \\ A^{a3} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Esto corresponde a un potencial vectorial en teoría de la relatividad con un índice de polarización adicional  $a$ . El componente 0 es el potencial escalar

$$A^{a0} = \frac{\phi^a}{c} \quad (26)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $a$  es otra vez el índice de polarización.  $A^{a\mu}$  es una cantidad de 2 componentes y puede expresarse en forma matricial como

$$(A^{a\mu}) = \begin{bmatrix} \frac{\phi^{(0)}}{c} & \frac{\phi^{(1)}}{c} & \frac{\phi^{(2)}}{c} & \frac{\phi^{(3)}}{c} \\ 0 & A^{(1)1} & A^{(2)1} & A^{(3)1} \\ 0 & A^{(1)2} & A^{(2)2} & A^{(3)2} \\ 0 & A^{(1)3} & A^{(2)3} & A^{(3)3} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Los índices entre paréntesis son los índices latinos (espacio tangente). La primera columna no contiene elementos del potencial vectorial porque éste último es una cantidad puramente espacial. En lo que sigue, suponemos que los vectores base de la variedad base son paralelos a los vectores base del espacio tangente. Entonces los índices de ambos espacios tienen una correspondencia bi-unívoca  $a \leftrightarrow \mu$  y tenemos sólo términos con  $a = \mu$ , y ausencia de términos mixtos. La Ec.(27) toma entonces la forma

$$(A^{a\mu}) = \begin{bmatrix} \frac{\phi^{(0)}}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^{(1)1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{(2)2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^{(3)3} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Omitiendo el índice de polarización, podemos escribir  $(A^{a\mu})$  con el potencial escalar "convencional"  $\phi$  y el potencial vectorial  $\mathbf{A}$ :

$$(A^{a\mu}) = \begin{bmatrix} \frac{\phi}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^3 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Sin embargo, cuando la tétrada se define con la Ec. (1),  $A_{\mu}^a$  debe darse en su forma covariante. Por lo tanto, debemos primero traducir el potencial vectorial  $A^{\mu}$  a su forma covariante

$$A_{\mu} = \eta_{\mu\nu} A^{\nu} \quad (30)$$

que da un cambio de signo en los componentes del vector  $\mathbf{A}$ . Finalmente, tenemos

$$(q^a_{\mu}) = \frac{(A^a_{\mu})}{A^{(0)}} = \frac{1}{A^{(0)}} \begin{bmatrix} \frac{\phi}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A^3 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

### 3 Ejemplos

Presentamos algunos ejemplos de potenciales estático y dinámico y computamos todas las cantidades de la geometría de Cartan, hasta los campos eléctrico y magnético.

#### 3.1 Potencial de Coulomb

Uno de los casos más sencillos e importantes de la electrodinámica es el potencial de Coulomb. En notación de 4-vector, el potencial es el componente 0

$$A^0 = \frac{\phi(r)}{c} = \frac{1}{c} \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (32)$$

donde  $q_e$  es la carga puntual central y  $r$  es la coordenada radial de un sistema de coordenadas esféricas

$$(X^{\mu}) = \begin{bmatrix} t \\ r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Según la Ec. (31), el potencial corresponde al primer elemento diagonal de la tétrada:

$$\phi(r) = c A^{(0)} q^{(0)}_0. \quad (34)$$

Insertando el potencial en la matriz  $q$  nos da

$$(q^a_{\mu}) = \frac{1}{2} \frac{(A^a_{\mu})}{A^{(0)}} = \frac{1}{A^{(0)}} \begin{bmatrix} \frac{\phi(r)}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

que es una matriz singular. La Geometría de Cartan, sin embargo, sólo está definida con tétradas no singulares. Por lo tanto, se requiere necesariamente un potencial vectorial, además de un potencial escalar. Elegimos la forma más sencilla, un potencial vectorial constante, que no da un campo magnetostático. La forma final de la tétrada es, entonces

$$(q^a{}_\mu) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{C_0}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_3 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

donde hemos reemplazado

$$C_0 = \frac{q_e}{A^{(0)} c 4\pi\epsilon_0} \quad (37)$$

y las  $C_i$  son constantes arbitrarias para  $i = 1, 2, 3$ . Por simplicidad de resultados, suponemos  $C_i > 0$  y omitimos los factores  $A^{(0)}$  y  $c$ , y luego el potencial vectorial es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Aplicando geometría de Cartan, las Ecs. (5-8) dan conexiones  $\Gamma$  con 4 parámetros no especificados,  $D_1$  a  $D_4$ :

$$\begin{aligned} \Gamma^0{}_{01} &= \frac{1}{r} & (39) \\ \Gamma^0{}_{10} &= -\frac{1}{r} \\ \Gamma^0{}_{12} &= \frac{D_4 C_2^2 r^2}{C_0^2} \\ \Gamma^0{}_{13} &= -\frac{D_3 C_1^2 r^2}{C_0^2} \\ &\dots \end{aligned}$$

Es posible fijar los  $D_i$  iguales a cero:

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = 0. \quad (40)$$

Entonces, sólo restan tres conexiones que no desaparecen:

$$\Gamma^0{}_{01} = \frac{1}{r}, \quad (41)$$

$$\Gamma^0{}_{10} = -\frac{1}{r}, \quad (42)$$

$$\Gamma^1{}_{00} = \frac{C_0^2}{C_1^2 r^3}. \quad (43)$$

El primer par es antisimétrico, mientras que la tercer conexión es un elemento diagonal que no contribuye a la torsión.

Aplicando las Ecs. (9-14), las conexiones de espín que no desaparecen son

$$\omega_{0(1)}^{(0)} = -\frac{C_0}{C_1 r^2}, \quad (44)$$

$$\omega_{0(0)}^{(1)} = -\frac{C_0}{C_1 r^2}, \quad (45)$$

que son índices antisimétricos en  $a$  y  $b$ . (Observar que el índice superior  $a$  debe de bajarse para comparación, lo cual da un cambio de signo para el segundo elemento de conexión.) Los duales de Hodge de la conexión  $\Gamma$  son

$$\Lambda^0_{23} = -\frac{C_2 C_3}{|C_0| C_1}, \quad (46)$$

$$\Lambda^0_{32} = \frac{C_2 C_3}{|C_0| C_1}, \quad (47)$$

siendo sólo constantes, y las conexiones de espín distintas de cero  $\Lambda$  son

$$\omega_{(\Lambda)1(0)}^{(0)} = \frac{1}{r}, \quad (48)$$

$$\omega_{(\Lambda)2(3)}^{(0)} = \frac{C_0 C_2}{|C_0| C_1 r}, \quad (49)$$

$$\omega_{(\Lambda)3(2)}^{(0)} = -\frac{C_0 C_3}{|C_0| C_1 r}. \quad (50)$$

Es importante notar que la conexión  $\omega_{(\Lambda)1(0)}^{(0)}$  tiene la forma que ya se ha deducido en tempranos documentos UFT. En aquellos, las conexiones de espín  $\Gamma$  y  $\Lambda$  no se habían discernido, y la que fuese referida dependía de las ecuaciones de campo empleadas. En las ecuaciones inhomogéneas (leyes de Coulomb y Ampere-Maxwell), aparecen las conexiones de espín  $\Lambda$ .

Los elementos del tensor de torsión y curvatura que no desaparecen son

$$T^0_{01} = -T^0_{10} = \frac{2}{r}, \quad (51)$$

$$R^0_{101} = -R^0_{110} = \frac{2}{r^2}, \quad (52)$$

$$R^1_{001} = -R^1_{010} = \frac{2C_0^2}{C_1^2 r^4}, \quad (53)$$

que son todos antisimétricos en sus dos últimos índices. Lo mismo se cumple para las formas de torsión y curvatura:

$$T^{(0)}_{01} = -T^{(0)}_{10} = \frac{C_0}{r^2}, \quad (54)$$

$$R^{(0)}_{(1)01} = -R^{(0)}_{(1)10} = -\frac{2C_0}{C_1 r^3}, \quad (55)$$

$$R^{(1)}_{(0)01} = -R^{(1)}_{(0)10} = -\frac{2C_0}{C_1 r^3}. \quad (56)$$

Los resultados finales, según las Ecs. (18-19), son los campos eléctricos

$$\mathbf{E}^{(0)} = c A^{(0)} \begin{bmatrix} \frac{C_0}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}^{(2)} = \mathbf{E}^{(3)} = \mathbf{0}, \quad (58)$$



y los campos magnéticos

$$\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{B}^{(3)} = \mathbf{0}. \quad (59)$$

Sólo el componente 0 eléctrico de polarización no es un vector cero, y todas las polarizaciones del campo magnético desaparecen. Esto es, exactamente, el resultado clásico

$$\mathbf{E}^{(0)} = \mathbf{E} = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (60)$$

### 3.2 Potencial vectorial de un conductor recto con corriente

El siguiente ejemplo es el potencial vectorial de un conductor recto infinito [9]. En coordenadas cilíndricas, el potencial vectorial viene dado por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ C_3 \log(r) \end{bmatrix}. \quad (61)$$

El alambre conductor se orienta en dirección  $Z$ . La constante  $C_3$  se define mediante

$$C_3 = -\frac{\pi a^2 j_Z}{2\pi\epsilon_0 c^2} \quad (62)$$

donde  $a$  es el diámetro del alambre,  $j_Z$  es la corriente, y  $\epsilon_0$  es la permitividad en el vacío.

Aplicando el mismo mecanismo que en el ejemplo previo conduce a la matriz de la tétrada

$$(q^a{}_\mu) = \frac{1}{2} \frac{1}{A^{(0)}} \begin{bmatrix} C_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_3 \log(r) \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Suponemos  $C_0 > 0, C_1 > 0, C_2 > 0, C_3 < 0$ , que es similar al enfoque en el ejemplo previo. Las ecuaciones de la geometría de Cartan se aplican como se describió previamente. Sólo presentamos los resultados de la conexión de espín:

$$\omega^{(1)}{}_{3(3)} = -\omega^{(3)}{}_{3(1)} = \frac{C_1}{C_3 r}, \quad (64)$$

y

$$\omega_{(\Lambda)}^{(3)}{}_{0(2)} = \frac{C_0}{C_1 r |\log(r)|}, \quad (65)$$

$$\omega_{(\Lambda)}^{(3)}{}_{1(3)} = -\frac{1}{r \log(r)}, \quad (66)$$

$$\omega_{(\Lambda)}^{(3)}{}_{2(0)} = \frac{C_2}{C_1 r |\log(r)|}. \quad (67)$$

Nuevamente, no tenemos antisimetría para la conexión de espín  $\omega_{(\Lambda)}$ . Los campos eléctricos resultantes son

$$\mathbf{E}^{(a)} = \mathbf{0}, \quad (68)$$

y los campos magnéticos son

$$\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{B}^{(1)} = \mathbf{B}^{(2)} = \mathbf{0}, \quad (69)$$

siendo el tercer campo de polarización

$$\mathbf{B}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{C_3}{r} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Este es, exactamente, el campo obtenido a partir del cálculo clásico

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (71)$$

### 3.3 Onda electromagnética con polarización circular

El tercer ejemplo es un campo electromagnético en rotación en la forma de una onda con polarización circular. Los vectores base de dicha onda rotan en el plano  $XY$  de coordenadas cartesianas. En el electromagnetismo clásico no hay componente  $Z$ , pero en la teoría de campo  $\mathbf{B}^{(3)}$  de Evans lo hay. El potencial vectorial también es un campo en rotación, con la fase corrida 90 grados en el plano  $XY$ . Definimos la matriz de la tétrada como antes, mediante

$$(q^a{}_\mu) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{R}) & -\sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{R}) & 0 \\ 0 & \sin(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{R}) & -\cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{R}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (72)$$

con la velocidad angular temporal  $\omega$ , vector de onda  $\mathbf{k} = [k^1, k^2, k^3]$  y vector de coordenadas  $\mathbf{R} = [X, Y, Z]$ . Cuando se fijan, como antes, iguales a cero las constantes que aparecen en la conexión  $\Gamma$ , no aparecen campos eléctricos ni magnéticos. Sin embargo, hay conexiones de espín que son idénticas para la conexión  $\Gamma$  y  $\Lambda$ :

$$\omega_{0(2)}^{(1)} = -\omega_{0(1)}^{(2)} = -\frac{\omega}{c}, \quad (73)$$

$$\omega_{1(2)}^{(1)} = -\omega_{1(1)}^{(2)} = k^1, \quad (74)$$

$$\omega_{2(2)}^{(1)} = -\omega_{2(1)}^{(2)} = k^2, \quad (75)$$

$$\omega_{3(2)}^{(1)} = -\omega_{3(1)}^{(2)} = k^3. \quad (76)$$

La métrica  $g$  es idéntica a la métrica de Minkowski. Esto muestra que un campo definido en un espacio "plano" puede tener una conexión de espín de relatividad general.

La situación cambia cuando no todas las constantes inferidas por la conexión  $\Gamma$  se fijan como iguales a cero. Definimos:

$$D_1 := \kappa \neq 0 \quad (77)$$

donde  $\kappa$  es el número de onda, por ejemplo  $\kappa = 1/m$ . Las otras constantes permanecen iguales a cero. Mientras que la métrica es nuevamente la de Minkowski, porque no depende de las conexiones, aparecen más términos en las conexiones de espín.

El resultado final para los campos eléctrico y magnético resulta muy interesante:

$$\mathbf{E}^{(1)} = A^{(0)} c \kappa \begin{bmatrix} -\sin(\omega t - \mathbf{kR}) \\ \cos(\omega t - \mathbf{kR}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (78)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = A^{(0)} c \kappa \begin{bmatrix} -\cos(\omega t - \mathbf{kR}) \\ -\sin(\omega t - \mathbf{kR}) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (79)$$

y

$$\mathbf{B}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A^{(0)} \kappa \end{bmatrix}. \quad (80)$$

Todos los otros campos son iguales a cero. Los campos poseen las dimensiones correctas de V/m y Tesla. Los campos eléctricos rotan en sentido contrario a los vectores de potencial, como se espera. Muy interesante es que aparece un campo magnético constante en la dirección Z, que en principio es el campo  $\mathbf{B}^{(3)}$  de Evans. Esto es una consecuencia de que la tetrada siempre debe de ser no singular. Por lo tanto, al menos un componente  $A^{a3}$  debe estar presente, como es el caso en la Ec. (72).

### 3.4 Análisis y conclusiones

Se ha mostrado un sendero computacional completo a lo largo de todas las etapas de la geometría de Cartan, demostrando así que la teoría ECE es por completo manejable. Los ejemplos presentados son analíticos, y se introdujo un método simplificado con una tetrada diagonal, eligiendo que los vectores unitarios del espacio tangente de la geometría de Cartan fuesen paralelos a los de la variedad base, lo cual conduce a una matriz de la tetrada diagonal.

En casos más complicados, no es posible elegir que las bases del espacio tangente sean paralelas a las bases de la variedad base. Ello conduce a elementos de la tetrada no diagonales, que ya vimos en el tercer ejemplo, la onda electromagnética con polarización circular. En estos casos, a fin de encontrar valores significativos, los parámetros libres obtenidos de los sistemas de ecuaciones lineales deben definirse de una forma en que resulten campos de fuerza significativos. Este punto resulta crítico, y requiere de una cuidadosa consideración de los enfoques a emplear.

Como alternativa a los métodos analíticos, los cálculos podrían ser completamente numéricos. Se definiría entonces la tetrada, para cada punto en el espacio, mediante una matriz de puros números, y las derivadas se computarían numéricamente. Todas las ecuaciones deberían de computarse por cada punto en el espacio, lo cual sería computacionalmente intensivo y requeriría de equipos de cómputo de alto rendimiento. La complejidad, sin embargo, no excedería aquella empleada en cálculos de FEM, por ejemplo.

En futuros desarrollos, se explorarán enfoques alternativos. Por ejemplo, en lugar de comenzar con un potencial físico, podríamos considerar los campos de fuerza como cantidades dadas. Entonces la pregunta deviene: "¿cuales son las variables geométricas que conducen a este resultado, y cual es el potencial correspondiente?" Otra pregunta interesante sería: "¿cómo necesitan definirse los campos físicos a fin de obtener formas especiales de conexiones de espín?" Estas preguntas podrían ser de interés tecnológico.

## Referencias

- [1] M. W. Evans, “Generally Covariant Unified Field Theory: the Geometrization of Physics” (Abramis Academic, 2005 al presente), vols. 1 - 7.
- [2] L. Felker, “The Evans Equations of Unified Field Theory” (Abramis Academic, 2007). Hay traducción en Sección Español de [www.aias.us](http://www.aias.us).
- [3] Unified Field Theory (UFT) sección de [www.aias.us](http://www.aias.us). Sección en Español.
- [4] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt, K. Pendergast, “Criticism of the Einstein Field Equation” (Cambridge International Science Publishing, 2011).
- [5] Myron Evans, Horst Eckardt (editor), Douglas Lindstrom, Stephen Crothers, “Principles of ECE Theory: A new paradigm of physics”, softcover, b&w: New Generation Publishing (2016), ISBN: 978-1787191808, hardcover: ePubli, Berlin (2018), ISBN: 978-3-746717-93-7. Hay Traducción.
- [6] Myron Evans, Horst Eckardt (editor), Douglas Lindstrom, Stephen Crothers, Ulrich Bruchholz, “Principles of ECE Theory, Volume II”, tapa blanda : ePubli, Berlin (2017), ISBN: 978-3-7450-1957-5, tapa dura : ePubli, Berlin (2017), ISBN: 978-3-7450-1326-9. Hay traducción.
- [7] Paper 438, ECE textbook, section 1-3, Unified Field Theory (UFT) section of [www.aias.us](http://www.aias.us). Hay traducción en la Sección en Español.
- [8] Papers 316-320, Unified Field Theory (UFT) sección de [www.aias.us](http://www.aias.us). Hay traducción en la Sección en Español.
- [9] “Magnetic Vector potential of an infinite straight current wire”, <http://www.feynmanlectures.caltech.edu/II-14.html>