

Geometría de Cartan de diversos movimientos de un giróscopo.

por

M .W. Evans y H. Eckardt

Civil List y AIAS / UPITEC

(www.aias.us, www.upitec.org, www.et3m.net, www.archive.org, www.webarchive.org.uk)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se demuestra la aceleración en el sistema de coordenadas polares esféricas como un ejemplo de una derivada covariante de Cartan con conexión de espín bien definida. El análisis lagrangiano de varios movimientos del giróscopo se da en términos de conjuntos de ecuaciones diferenciales simultáneas, las cuales se resuelven mediante el empleo del programa de cálculo numérico Maxima, para dar soluciones completas. La geometría subyacente siempre es geometría de Cartan. Los problemas resueltos de esta manera son: 1) el giróscopo en un campo gravitacional; 2) el giróscopo con la punta fija sobre un soporte; 3) la teoría de las órbitas esféricas; 4) la teoría general de un giróscopo en un campo de fuerzas externo, 5) la teoría general de los ciclos de Milankovitch.

Palabras clave: teoría ECE, geometría de Cartan, movimientos de un giróscopo, ciclos de Milankovitch.

1. Introducción.

En esta serie de trescientos sesenta y nueve documentos y libros a la fecha [1-12], se han desarrollado las teorías de campo unificado ECE y ECE2 en términos de la conocida geometría de Cartan [1-12]. En consecuencia, cada uno de los documentos y libros se basa en geometría de Cartan, y se desarrolla la física como una variación del tema central. En la Sección 2, se muestra el sistema de coordenadas polares esféricas fundamental como ejemplo de geometría de Cartan, con una conexión de espín bien definida. En general, cualquier sistema de coordenadas curvilíneo es una variación de la geometría de Cartan, definiéndose cada sistema de coordenadas por una conexión de espín. Este nuevo teorema fundamental se ejemplifica mediante aplicaciones para el movimiento de un giróscopo de diversos tipos: 1) el giróscopo en un campo gravitacional; 2) el giróscopo vinculado a un soporte; 3) la teoría completa de las órbitas esféricas; 4) la teoría general de un giróscopo en un campo de fuerzas externo; 5) la teoría general de los ciclos de Milankovitch.

Este documento es una breve sinópsis de extensos y detallados cálculos contenidos en las Notas de Acompañamiento del documento UFT369, publicadas en el portal www.aias.us. La Nota 369(1) describe la teoría de un giróscopo en un campo gravitacional; la Nota 369(2) es la teoría de un giróscopo sin peso; la Nota 369(3) es una teoría preliminar de los ciclos de Milankovitch; las Notas 369(4) a 369(6) deducen la conexión de espín del sistema de coordenadas polares esféricas y generalizan el resultado para cualquier sistema de coordenadas curvilíneas; la Nota 369(7) da una teoría completa de las órbitas esféricas; la Nota 369(8) describe la teoría general del giróscopo en un campo externo, y la Nota 369(9) da una teoría general de los ciclos de Milankovitch. Estas teorías son variaciones sobre el tema del movimiento de un giróscopo, y cada problema se resuelve mediante conjuntos de ecuaciones diferenciales simultáneas en las variables de Lagrange relevantes.

La Sección 2 es una breve sinópsis del análisis lagrangiano relevante en cada caso. La Sección 3 resuelve las ecuaciones diferenciales simultáneas, y representa gráficamente los resultados más importantes.

2. Variación sobre el tema del movimiento de un giróscopo.

Estas variaciones se basan en el Sistema de coordenadas relevante, en específico en sistema polar esférico. Al igual que en la Nota 369(4), se demuestra en el inicio de esta sección que el sistema de coordenadas polares esféricas se caracteriza por una derivada convectiva y una matriz de conexión de espín bien definidas en la geometría de Cartan. La nota se inicia mediante una recopilación de la derivación de la conexión de espín del sistema polar plano, y procede a definir la aceleración en el sistema polar esférico como la derivada covariante de Cartan de la velocidad. De manera que todos los sistemas de coordenadas constituyen ejemplos de la geometría de Cartan. Consideremos la velocidad lineal [1-12] en el sistema polar esférico:

$$\underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \underline{e}_\phi \quad (1)$$

en notación tradicional [1-12]. La aceleración lineal viene dada por:

$$\underline{a} = a_r \underline{e}_r + a_\theta \underline{e}_\theta + a_\phi \underline{e}_\phi \quad (2)$$

donde:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \quad (3)$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \quad (4)$$

$$a_\phi = 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} + r \sin \theta \ddot{\phi}. \quad (5)$$

La aceleración se define mediante la siguiente derivada covariante de Cartan:

$$\frac{D}{Dt} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r \sin \theta \dot{\phi} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r \sin \theta \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} & -\sin \theta \dot{\phi} \\ \dot{\theta} & 0 & -\dot{\phi} \cos \theta \\ \sin \theta \dot{\phi} & \dot{\phi} \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r \sin \theta \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (6)$$

en donde la matriz del lado derecho es la conexión de espín, y es un generador de rotación tridimensional. El resultado equivalente en coordenadas polares planas es:

$$\frac{D}{Dt} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (7)$$

en donde la matriz de 2 x 2 es la conexión de espín, generador de rotación en un plano.

La velocidad lineal en coordenadas polares esféricas es:

$$\underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r\dot{\theta} \underline{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin \theta \underline{e}_\phi \quad (8)$$

y la dinámica de los vectores unitarios se describe mediante:

$$\dot{\underline{e}}_r = \dot{\theta} \underline{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \underline{e}_\phi \quad (9)$$

$$\dot{\underline{e}}_\theta = -\dot{\theta} \underline{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \underline{e}_\phi \quad (10)$$

$$\dot{\underline{e}}_\phi = -\dot{\phi} \sin \theta \underline{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \underline{e}_\theta \quad (11)$$

Se deduce que la Ec. (6) puede expresarse como:

$$a_r = \frac{d\dot{r}}{dt} - \dot{e}_r \cdot v = \frac{dv_r}{dt} - \dot{e}_r \cdot v \quad (12)$$

$$a_\theta = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) - \dot{e}_\theta \cdot v = \frac{dv_\theta}{dt} - \dot{e}_\theta \cdot v \quad (13)$$

$$a_\phi = \frac{d}{dt}(r \sin\theta \dot{\phi}) - \dot{e}_\phi \cdot v = \frac{dv_\phi}{dt} - \dot{e}_\phi \cdot v \quad (14)$$

En el sistema polar plano, la dinámica de los vectores unitarios puede resumirse como:

$$\dot{e}_r = \dot{\theta} e_\theta \quad (15)$$

$$\dot{e}_\theta = -\dot{\theta} e_r \quad (16)$$

de manera que se deduce que la Ec. (7) puede expresarse como:

$$a_r = \frac{d\dot{r}}{dt} - \dot{e}_r \cdot v = \frac{dv_r}{dt} - \dot{e}_r \cdot v \quad (17)$$

$$a_\theta = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) - \dot{e}_\theta \cdot v = \frac{dv_\theta}{dt} - \dot{e}_\theta \cdot v \quad (18)$$

Se observa que el conjunto de ecuaciones (12) a (14) y (17) a (18) exhiben la misma estructura global basada en geometría de Cartan. De manera que los diversos movimientos del giróscopo, desarrollados como sigue, son variaciones sobre el tema de la geometría de Cartan y covariancia generalizada en teoría de la relatividad.

El primer ejemplo considera, como en la Nota 369(7), la órbita esférica de una masa m alrededor de una masa M en un campo de fuerzas central:

$$\underline{F} = -\underline{\nabla}U = m(a_r e_r + a_\theta e_\theta + a_\phi e_\phi) \quad (19)$$

donde la energía potencial es:

$$U = -\frac{mMG}{r} \quad (20)$$

La Ec. (19) puede desarrollarse como:

$$\underline{F} = -\underline{\nabla}U = m\left(\frac{dv}{dt} + \underline{\omega} \times \underline{v}\right) \quad (21)$$

donde ω es la velocidad angular en coordenadas polares esféricas, y v es la velocidad lineal. Se deduce que:

$$\underline{F} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \underline{e}_r = -\frac{mMG}{r^2} \underline{e}_r \quad (22)$$

de manera que:

$$\ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) = -\frac{MG}{r^2} \quad (23)$$

que es la ecuación de Leibniz para una órbita tridimensional. Para el campo de fuerzas central (21):

$$a_\theta \underline{e}_\theta + a_\phi \underline{e}_\phi = \underline{0} \quad (24)$$

de manera que

$$a_\theta^2 + a_\phi^2 = 0 \quad (25)$$

donde a_θ y a_ϕ vienen dados por la Ec. (2). El lagrangiano para la órbita esférica es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m v^2 - U \\ &= \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) + \frac{mMG}{r} \end{aligned} \quad (26)$$

y las tres ecuaciones de Euler Lagrange son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) \quad (27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) \quad (28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \quad (29)$$

A partir de las Ecs. (26) y (27):

$$\ddot{r} = r(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{MG}{r^2} \quad (30)$$

que es la Ec. (23), Q. E. D.

Las Ecs. (26) y (29) dan el momento angular L_e como una constant de movimiento:

$$L_{\phi} = m r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta \quad (31)$$

y:

$$\frac{dL_{\phi}}{dt} = 0. \quad (32)$$

Las Ecs. (26) y (28) dan:

$$r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = r \ddot{\theta} + 2 \dot{\theta} \dot{r} \quad (33)$$

de manera que, como se ilustra en la Nota 369(7), la solución completa para cualquier órbita esférica viene dada a través de la resolución de las siguientes tres ecuaciones diferenciales simultáneas:

$$\ddot{r} = r(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{MG}{r^2} \quad (34)$$

$$r \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = r \ddot{\theta} + 2 \dot{\theta} \dot{r} \quad (35)$$

$$\frac{2 \dot{r} L_{\phi}}{m r^2} + 2 r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + r \ddot{\phi} \sin^2 \theta = 0. \quad (36)$$

Esto se lleva a cabo en la Sección 3 mediante el empleo del código Maxima. En general, todas las órbitas son órbitas esféricas.

Las Notas 369(1) y 369(2) dan detalles completos del movimiento de un giróscopo en un campo gravitacional, utilizando el método lagrangiano. Se refiere a los lectores a estas notas para mayores detalles. Desarrollan los resultados del documento UFT368. Un resultado importante es que la condición para la ausencia de peso en el giróscopo es:

$$\ddot{\theta}(t) \sin \theta(t) + \dot{\theta}^2(t) \cos \theta(t) = \frac{MG}{r_e^2} \quad (37)$$

y esta teoría da soporte al resultado reproducible y repetible de Laithwaite, descrito en el documento UFT368. Bajo ciertas condiciones bien definidas, el giróscopo puede parecer como carente de peso.

En la Nota 369(8), se proporciona una teoría general para un giróscopo en un campo de fuerzas externo, utilizando el lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \underline{\dot{r}} \cdot \underline{\dot{r}} + \frac{1}{2} \left(I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \right) - U \quad (38)$$

La energía cinética traslacional viene dada por:

$$T(\text{tras}) = \frac{1}{2} m \underline{\dot{r}} \cdot \underline{\dot{r}} \quad (39)$$

donde \underline{r} es la posición, en el marco de referencia del laboratorio, del centro de masa del giróscopo de masa m . La energía cinética rotacional se define en el marco (1, 2, 3) de los principales momentos de inercia I_1, I_2 y I_3 del giróscopo. Aquí, ω_1, ω_2 y ω_3 son las velocidades angulares en los ejes 1, 2, y 3. En general [1-12] la energía potencial se define mediante:

$$\int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{r} = U_1 - U_2 \quad (40)$$

en términos del trabajo realizado por la fuerza \underline{F} para transportar el centro de masa del giróscopo desde el punto 1 al punto 2. Una solución de la Ec. (40) es:

$$\underline{F} = -\underline{\nabla} U \quad (41)$$

que corresponde al torque externo:

$$\underline{T}_q = \underline{r} \times \underline{F} \quad (42)$$

aplicado al giróscopo. La energía potencial, un escalar, es la misma en el marco del laboratorio (X, Y, Z) que en el marco (1, 2, 3).

En término de los ángulos de Euler θ, ϕ, ψ [1-12], las velocidades angulares son:

$$\omega_1 = \dot{\phi}_1 + \dot{\theta}_1 + \dot{\psi}_1 = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \quad (43)$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}_2 + \dot{\theta}_2 + \dot{\psi}_2 = \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \quad (44)$$

$$\omega_3 = \dot{\phi}_3 + \dot{\theta}_3 + \dot{\psi}_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \quad (45)$$

y para un trompo simétrico:

$$T(\text{rot}) = \frac{1}{2} I_{12} (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \quad (46)$$

como en en documento UFT368, donde:

$$I_{12} = I_1 = I_2 \quad (47)$$

El lagrangiano general es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m \underline{\dot{r}} \cdot \underline{\dot{r}} + T(\text{rot}) - (U_1 - U_2) \\ &= \frac{1}{2} m \underline{\dot{r}} \cdot \underline{\dot{r}} + T(\text{rot}) - \int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{r} \end{aligned} \quad (48)$$

en donde cualquier clase de fuerza externa \underline{F} puede definirse en el marco del laboratorio (X, Y, Z).

$$\mathcal{L} = T(\text{rot}) - mgh \cos \theta \quad (49)$$

en la notación de UFT 368. El giróscopo con un punto fijo no puede trasladarse, de manera:

$$\underline{\dot{r}} = \underline{0} \quad (50)$$

Si se permite que se mueva la punta del giróscopo, y se aplica una fuerza externa, el lagrangiano (49) se generaliza a:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \underline{\dot{r}} \cdot \underline{\dot{r}} + T(\text{rot}) - mgh \cos \theta - \int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{r} \quad (51)$$

en donde

$$\underline{\dot{r}} \neq \underline{0}. \quad (52)$$

Escribiendo:

$$U := U_1 - U_2 \quad (53)$$

el lagrangiano deviene:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{\underline{r}} \cdot \dot{\underline{r}} + T(\text{rot}) - mgh \cos \theta - U \quad (54)$$

Las variables de Lagrange son r, θ, ϕ, ψ , y la dinámica del giróscopo se describe mediante las cuatro ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\underline{\nabla} \mathcal{L} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\underline{r}}} \right) \quad (55)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) \quad (56)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \quad (57)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) \quad (58)$$

Para una energía potencial que depende solamente de r

$$U = U(r) \quad (59)$$

estas ecuaciones de Euler Lagrange dan (UFT368):

$$\dot{\phi} = \frac{L_\phi - L_\psi \cos \theta}{I_{12} \sin^2 \theta} \quad (60)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{I_3} (L_\psi - I_3 \cos \theta) \quad (61)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\sin \theta}{I_{12}} \left(\dot{\phi}^2 \cos \theta (I_{12} - I_3) - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} + mgh \right) \quad (62)$$

y

$$m \frac{d\underline{r}}{dt} = -\underline{\nabla} U(r) \quad (63)$$

Para una energía potencial de tipo (59), el movimiento traslacional del centro de masa del giróscopo es independiente de su propio movimiento rotacional (nutaciones y precesiones). Sin embargo, en el caso general:

$$U = U(r, \theta, \phi, \psi) \quad (64)$$

los movimientos rotacional y traslacional están interrelacionados.

Finalmente, la Nota 369(9) considera el caso general de los ciclos de Milankovitch, los cuales se consideran como debidos a las nutaciones y precesiones del trompo giroscópico asimétrico, de masa m , en el campo gravitacional del Sol, de masa M . La distancia entre el Sol y el centro de masa del giróscopo es \underline{r} en el marco de referencia del laboratorio (X, Y, Z). La distancia entre el centro de masa y un punto en el giróscopo es \underline{r}_1 , en el mismo marco del laboratorio. De manera que el lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{\underline{r}} + \dot{\underline{r}}_1) \cdot (\dot{\underline{r}} + \dot{\underline{r}}_1) - U \quad (65)$$

donde U es el potencial gravitacional:

$$U = - \frac{mMG}{r} \quad (66)$$

La posición del centro de masa es:

$$\underline{r} = X \underline{i} + Y \underline{j} + Z \underline{k} \quad (67)$$

La posición de \underline{r}_1 se define en el marco (1, 2, 3) de los principales momentos de inercia:

$$\underline{r}_1 = r_{11} \underline{e}_1 + r_{12} \underline{e}_2 + r_{13} \underline{e}_3 \quad (68)$$

en donde r_{11} , r_{12} y r_{13} son constantes definidas por la forma del giróscopo y se relacionan con los momentos de inercia principales.

De manera que el movimiento combinado es de nutación y de precesión del giróscopo, sobreimpuesto al movimiento orbital.

La transformación desde (1, 2, 3) a (X, Y, Z) viene dada por [1-12]:

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i} \\ \underline{j} \\ \underline{k} \end{bmatrix} \quad (69)$$

en términos de los ángulos de Euler. Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{i} \\ \underline{j} \\ \underline{k} \end{bmatrix} \quad (70)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi \\ B &= -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi \\ C &= \sin \theta \cos \phi \\ D &= \cos \psi \cos \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi \\ E &= -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi \\ F &= -\sin \theta \cos \phi \\ G &= \sin \psi \cos \theta \\ H &= \cos \psi \sin \theta \\ I &= \cos \theta. \end{aligned} \quad (71)$$

Se deduce entonces que:

$$\begin{aligned} \underline{r}_1 &= r_{11}(A\underline{i} + B\underline{j} + C\underline{k}) + r_{12}(D\underline{i} + E\underline{j} + F\underline{k}) + r_{13}(G\underline{i} + H\underline{j} + I\underline{k}) \\ &= (r_{11}A + r_{12}D + r_{13}G)\underline{i} + (r_{11}B + r_{12}E + r_{13}H)\underline{j} + (r_{11}C + r_{12}F + r_{13}I)\underline{k} \\ &= X_1\underline{i} + Y_1\underline{j} + Z_1\underline{k} \end{aligned} \quad (72)$$

Por lo tanto, el lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left((\dot{X} + \dot{X}_1)^2 + (\dot{Y} + \dot{Y}_1)^2 + (\dot{Z} + \dot{Z}_1)^2 \right) + \frac{mMG}{r}. \quad (73)$$

Si se considera que la órbita es plana, entonces:

$$\begin{aligned} X &= r \cos \theta_1 \\ Y &= r \sin \theta_1 \\ Z &= 0 \end{aligned} \quad (74)$$

Por lo tanto, la dinámica viene dada por las cinco ecuaciones de Euler Lagrange, en cinco variables de Lagrange, como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) \end{aligned} \quad (75)$$

Éstas deben de resolverse simultáneamente. Nótese que:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{r} \cos \theta_1 - r \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \\ \dot{Y} &= \dot{r} \sin \theta_1 + r \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ \dot{Z} &= 0 \end{aligned} \quad (76)$$

y:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= r_{11} \frac{dA}{dt} + r_{12} \frac{dB}{dt} + r_{13} \frac{dG}{dt} \\ \dot{Y}_1 &= r_{11} \frac{dB}{dt} + r_{12} \frac{dE}{dt} + r_{13} \frac{dH}{dt} \\ \dot{Z}_1 &= r_{11} \frac{dC}{dt} + r_{12} \frac{dF}{dt} + r_{13} \frac{dI}{dt} \end{aligned} \quad (77)$$

Éstas pueden evaluarse mediante álgebra computacional, a fin de evitar error humano. Por lo tanto, el lagrangiano es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} m \left(\left(\dot{r} \cos \theta_1 - r \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \dot{X}_1 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\dot{r} \sin \theta_1 + r \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \dot{Y}_1 \right)^2 + \dot{Z}_1^2 \right) + \frac{mMG}{r} \end{aligned} \quad (78)$$

Se observa que los ciclos de Milankovitch son el resultado de una dinámica intrincada, en donde todos se encuentran interrelacionados. La solución para este problema se comenta en la Sección 3 mediante el empleo de métodos numéricos.

3. Soluciones numéricas y gráficas de resultados selectos.

Consideraremos en esta sección tres casos especiales de movimiento de giróscopo.

3.1 Movimiento de un goróscopo en caída libre.

Computamos el movimiento de un trompo simétrico con un punto fijo, en donde dicho punto fijo se mueve libremente en la dirección Z . Éste es un giróscopo en caída libre. El modelo del giróscopo fijo, con ángulos de Euler θ, ϕ, ψ , se extiende mediante una coordenada R , que representa el movimiento en la dirección Z , ver Fig. 1. Entonces, la parte rotacional del lagrangiano es, según la Ec. (46):

$$T_{rot} = \frac{1}{2} I_{12} (\dot{\phi}^2 \text{sen}(\theta)^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\phi} \cos(\theta) + \dot{\psi})^2 . \quad (79)$$

La parte traslacional debe de extenderse mediante un término \dot{R} , que representa la velocidad en la dirección Z :

$$T_{trans} = \frac{m}{2} (\dot{R} + h\dot{\theta}\text{sen}(\theta))^2 . \quad (80)$$

Correspondientemente, la energía potencial es

$$U = mg(h\cos(\theta) + R) . \quad (81)$$

con aceleración gravitacional g . El lagrangiano es

$$\mathcal{L} = T_{rot} + T_{trans} - U . \quad (82)$$

Las cuatro ecuaciones de Lagrange consisten en tres ecuaciones para θ, ϕ, ψ , como anteriormente, más una adicional para la coordenada R :

$$\ddot{R} = h\ddot{\theta} \text{sen}(\theta) + h\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - g . \quad (83)$$

Existe un acoplamiento entre las derivadas segundas de R y θ , de manera que ésta no es la forma canónica. Resolviendo el sistema de ecuaciones de Lagrange de cuatro incógnitas $\ddot{\theta}, \ddot{\phi}, \ddot{\psi}, \ddot{R}$ da entonces las ecuaciones canónicas

$$\ddot{\theta} = \frac{\left((I_{12} - I_3) \dot{\phi}^2 \cos(\theta) - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \right) \sin(\theta)}{I_{12}}, \quad (84)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{\left((2I_{12} - I_3) \dot{\phi} \cos(\theta) - I_3 \dot{\psi} \right) \dot{\theta}}{I_{12} \sin(\theta)}, \quad (85)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{\left((I_{12} - I_3) \dot{\phi} \cos(\theta)^2 - I_3 \dot{\psi} \cos(\theta) + I_{12} \dot{\phi} \right) \dot{\theta}}{I_{12} \sin(\theta)}, \quad (86)$$

$$\ddot{R} = h \cos(\theta) \dot{\theta}^2 + \frac{\left((I_{12} - I_3) h \dot{\phi}^2 \cos(\theta) - I_3 h \dot{\phi} \dot{\psi} \right) \sin(\theta)^2}{I_{12}} - g. \quad (87)$$

Las soluciones numéricas de las ecuaciones (84-87) se presentan en las Figs. 2-4, para un conjunto adecuado de condiciones iniciales. Puede verse, a partir de la Fig. 2, que los ángulos de nutación y precesión (θ y ϕ) oscilan con cambio de fase, mientras que el ángulo de rotación (ψ) aumenta en forma aproximadamente lineal, es decir que la velocidad de rotación es casi constante, pero modulada por las posiciones de los otros ángulos. Hay un impacto sobre la rotación del cuerpo rígido alrededor del eje de su cuerpo. Este efecto no puede ocurrir cuando solamente se utilizan dos ángulos del sistema de coordenadas polares (θ , ϕ), ya que entonces se reduce un grado de libertad y falta información esencial. El giróscopo se está moviendo en caída libre, en una dirección negativa de Z . Esto puede observarse a partir de la parábola de caída libre de R (Fig. 3). En semejante caso la velocidad sería lineal, pero está modulada por la precesión angular. La curva espacial del centro de masa (Fig. 4) muestra una hélice elíptica con ángulo de torsión variable debido a la aceleración en la dirección $-Z$.

3.2 Explicación del experimento de Laithwaite.

En el experimento de Laithwaite, un trompo en rotación se levanta de un modo tal que, durante el despegue, se mueve el eje de una manera que la fuerza de elevación es obviamente pequeña en comparación con el peso del trompo en rotación (ver el video del Laithwaite publicado en YouTube). Puede que se modifiquen las condiciones iniciales de nutación, de manera tal que, por un momento, se contractúe la fuerza gravitacional. Esto significa que

$$\ddot{R} = 0 \quad (88)$$

durante este momento. Insertando esto en la Ec.(87), y suponiendo $I_{12} = I_3$ por motivos de simplicidad, ello conduce a la condición

$$g = h\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - h\dot{\phi}\dot{\psi} \sin(\theta)^2. \quad (89)$$

Los resultados de simulación muestran que semejante condición puede alcanzarse mediante un fuerte valor inicial negativo de $\dot{\theta}$, dando un golpe al trompo en rotación. Entonces la posición del punto fijo (sostenido con la mano) sobrepasa la posición inicial, tal como se observa en la

Fig. 5. La velocidad vertical $v = \dot{R}$ es positiva y oscila de un modo relativamente fuerte durante el movimiento posterior. La condición de falta de peso, la Ec. (89), se representa en la Fig. (6). Se representan gráficamente el lado derecho y el lado izquierdo de la ecuación, y el trompo deja de tener peso en el punto de intersección de ambas curvas. Los detalles dependen de los parámetros seleccionados. Nuestro cálculo es solo un modelo de cálculo, sin el empleo de valores reales para los parámetros, dado que ello requeriría un esfuerzo de investigación considerable. Podemos mostrar que el experimento de Laithwaite es en principio posible sobre la base de la dinámica clásica.

3.3 Torque externo

Puede introducirse un torque externo mediante una fuerza generalizada en el mecanismo de Lagrange. Dado que aquí estuvimos trabajando con potenciales, definimos un potencial que nos dé un torque constante T_{qo} en la dirección Z (para el ángulo ϕ) mediante

$$T_q = - \frac{\partial U_q}{\partial \phi} \quad (90)$$

con

$$U_q = - T_{qo} \phi \quad (91)$$

y sumando esto a la energía potencial.

$$U = mg(h\cos(\theta) + R) + U_q. \quad (92)$$

Este término – si se elige de modo tal que no sea demasiado pequeño – posee un impacto enorme sobre el movimiento del giróscopo. Los resultados pueden llegar a ser muy exóticos en función del valor de T_{qo} y de las condiciones iniciales. La Fig. 7 muestra las tres frecuencias angulares. Hay una fase inicial en donde la rotación ϕ permanece constante, a pesar de que se está aplicando una fuerza externa. Luego de esta fase, $\dot{\phi}$ se incrementa linealmente en promedio debido al torque, como habría de esperarse. Las correspondientes trayectorias angulares se representan en la Fig. 8. El ángulo θ muestra una nutación. Resulta interesante observar que la auto-rotación del giróscopo cambia de dirección luego de la fase inicial, permaneciendo en el mismo sitio durante un momento (cuando está cruzando el eje en el valor igual a cero). La velocidad vertical (Fig. 9) muestra fuertes oscilaciones, las cuales incluso resultan detectables en el movimiento lineal R . La fase inicial es claramente discernible del resto mediante una inspección de la curva espacial del centro de masa (Fig. 10). Luego de algún movimiento inicial irregular, domina la rotación ϕ .

Otros efectos, más complejos, surgen cuando se provoca que T_q tenga periodicidad temporal, como por ejemplo

$$T_q = T_{q0} \cos(\omega t) \quad (93)$$

con una frecuencia temporal ω . Entonces pueden surgir nuevos efectos, como heterodinos en velocidades angulares, tal como en el ejemplo mostrado en la Fig. 11. En este caso, no hay rotación continua en la dirección ϕ . Mediante condiciones iniciales adecuadas, se vuelve incluso posible detener todas las rotaciones.

No fue posible confirmar el efecto de elevación, investigado experimentalmente por Shipov. Mediante la aplicación de un torque en ϕ (es decir, alrededor de la dirección Z) un giróscopo debiera de perder peso. Esto podría ser por un incremento en momento lineal, en contra de la fuerza gravitacional. Aun cuando los momentos pueden intercambiarse entre toda clase de movimientos, un formalismo lagrangiano conserva el momento total. Esto podría evitarse mediante al aplicación de un torque externo, pero parecería que varios tipos de torque deben de conectarse y desconectarse, siguiendo un patron complejo, a fin de obtener un movimiento lineal resultante en contra de la fuerza gravitacional. Un simple torque ϕ no pareciera ser capaz de producir semejante efecto.

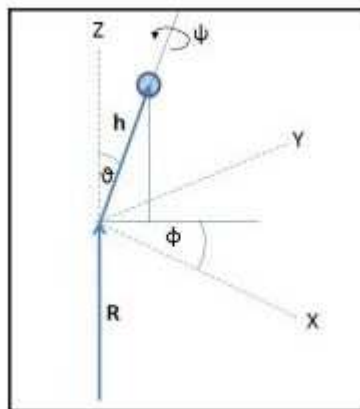


Figura 1: Geometría de un giróscopo en caída libre, con un punto fijo.

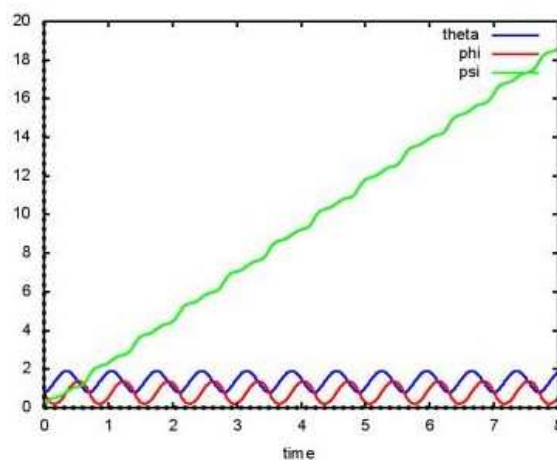


Figura 2: Trayectorias $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$, para un giróscopo en caída libre.

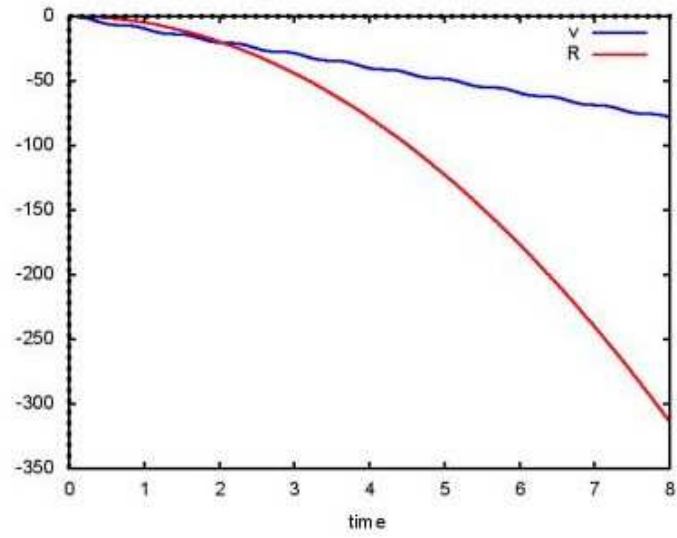


Figura 3: Velocidad vertical $v(t)$ y altura $R(t)$ para un gir6scopo en caida libre.

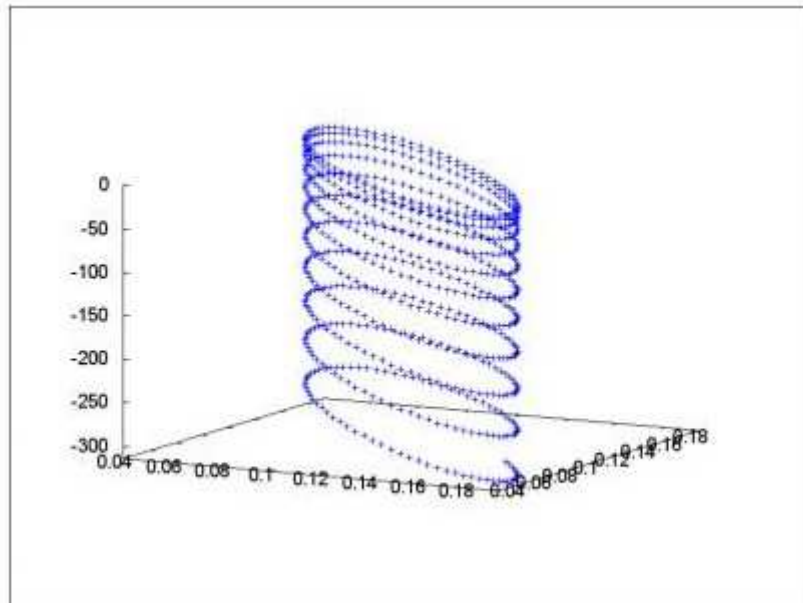


Figura 4: Curva espacial para un gir6scopo en caida libre.

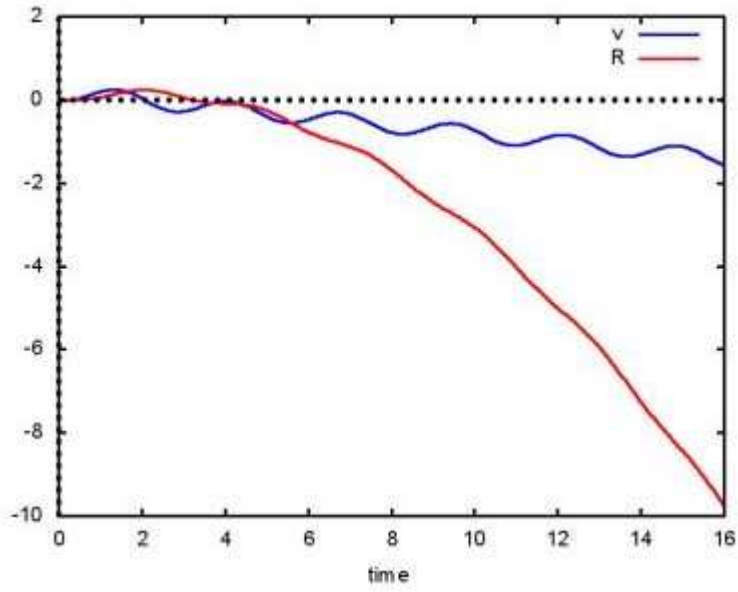


Figura 5: Ejemplo de valores $v(t)$ y $R(t)$ para el experimento de Laithwaite.

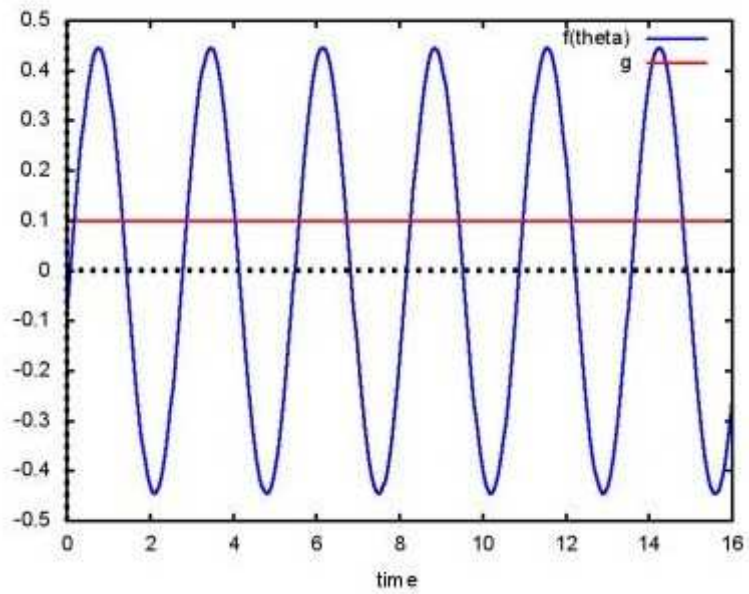


Figura 6: Ambos lados de la Ec.(89), demostrando los puntos sin peso.

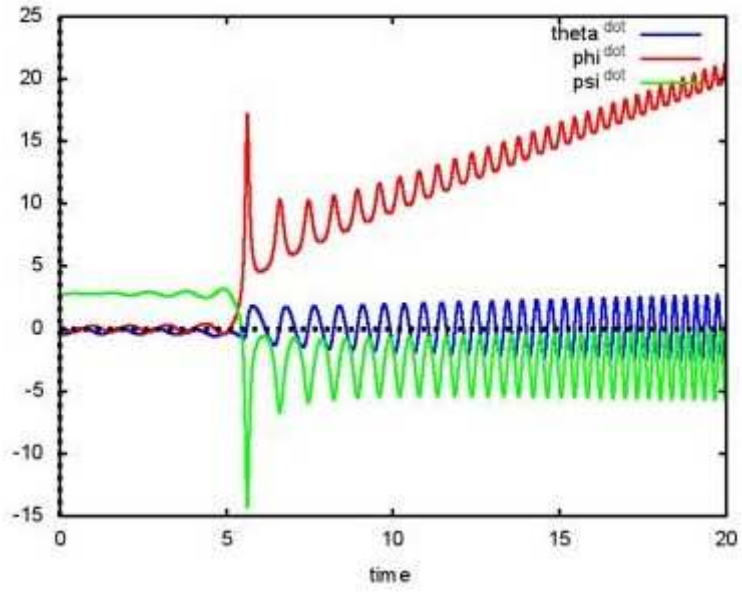


Figura 7: Trayectorias $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\phi}(t)$, $\dot{\psi}(t)$, para un torque externo ϕ .

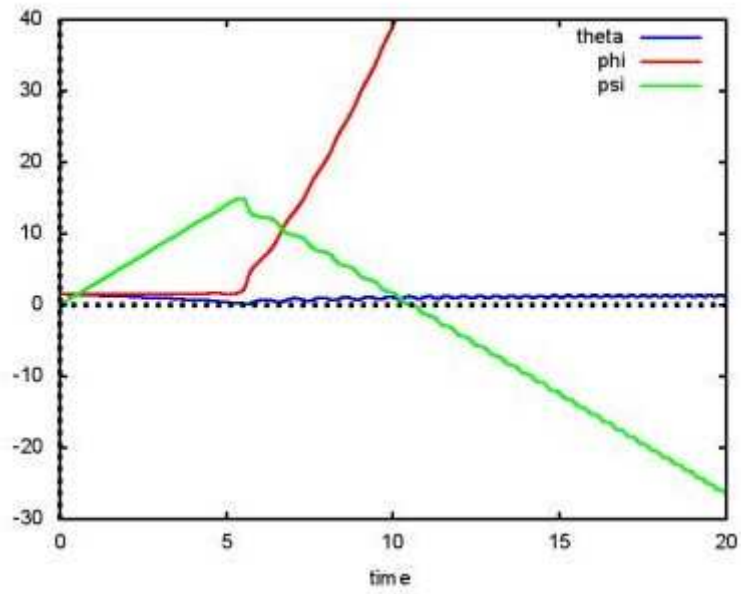


Figura 8: Trayectorias $\theta(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$, para un torque externo ϕ .

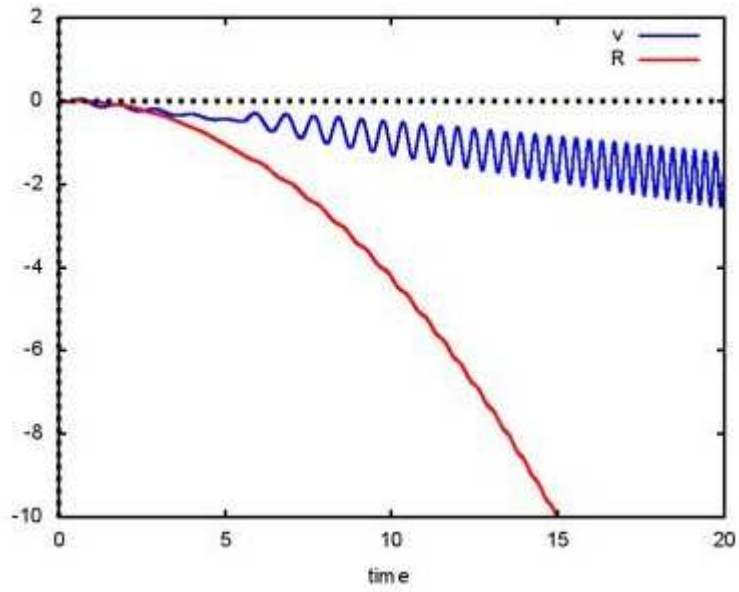


Figura 9: Trayectorias $v(t)$, $R(t)$, para un torque externo ϕ .

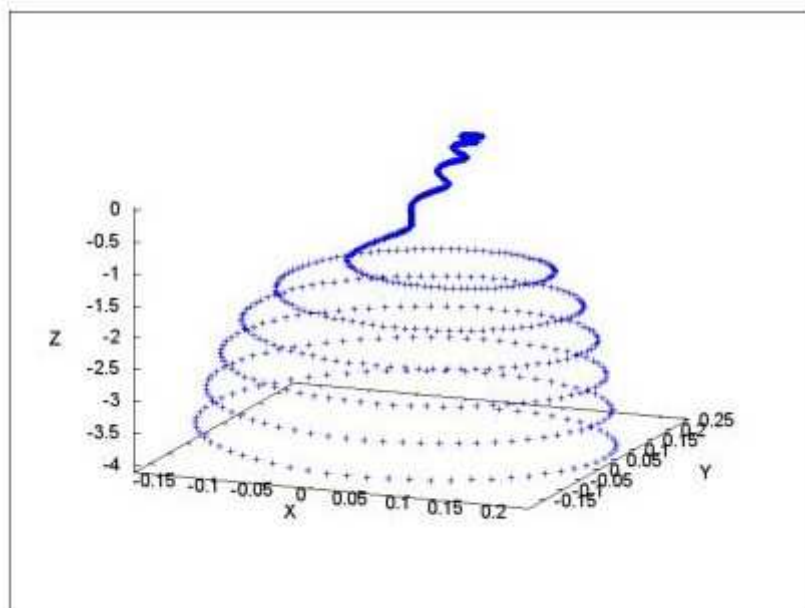


Figura 10 : Curva espacial para un torque externo ϕ .

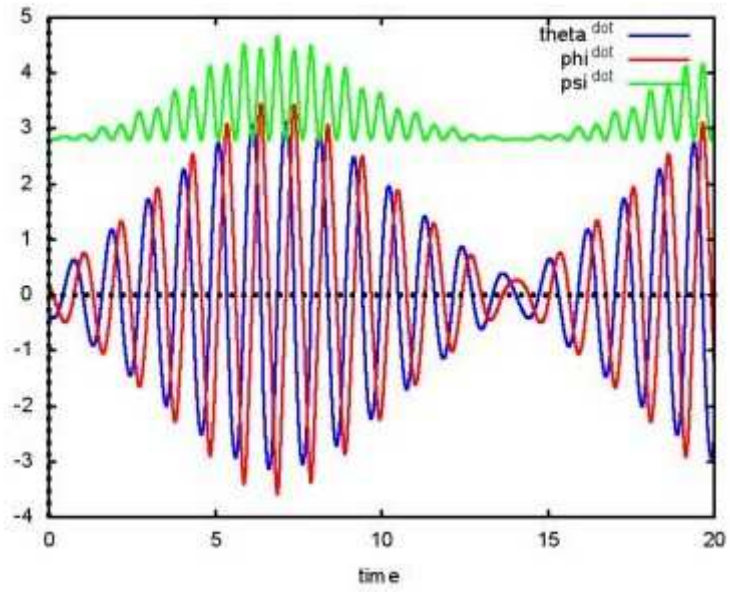


Figura 11: Velocidades angulares para un torque externo ϕ variable en función del tiempo.

Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia y al equipo técnico de AIAS / UPITEC por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh por el mantenimiento al portal www.aias.us y al programa de retroalimentación y publicación voluntaria. Se agradece a Alex Hill por las traducciones y lecturas en idioma castellano y a Robert Cheshire por las lecturas en idioma inglés.

Referencias bibliográficas.

- [1] M. W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom y S. J. Crothers, “ECE2: El Segundo Cambio Paradigmático” (UFT366 y sección de publicaciones y en español de los portales www.aias.us y www.upitec.org, versión castellana traducida por Alex Hill, en prep., e publi, Berlín 2017).
- [2] M. W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom y S. J. Crothers, “Principios de la Teoría ECE” (UFT350 y sección de publicaciones del portal www.aias.us , epubli Berlín 2016, New Generation, Londres, 2016).
- [3] M. W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K Pendergast, “Criticisms of the Einstein Field Equation” (UFT301, Cambridge International (CISP) 2010).
- [4] L. Felker, “The Evans Equations of Unified Field Theory” (UFT302, Abramis 2007, traducción al castellano por Alex Hill, en la sección en español del portal www.aias.us).
- [5] H. Eckardt, “El Modelo de Ingeniería ECE” (UFT303).
- [6] M. W. Evans, “Collected Scientometrics” (UFT307 y New Generation, 2015).
- [7] M. W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, “Generally Covariant Unified Field Theory” (Abramis, 2005 a 2011 y documentos relevantes de la serie UFT), en siete volúmenes.
- [8] M. W. Evans, ed., J. Found. Phys. Chem., (CISP 2011)
- [9] M. W. Evans y L. B. Crowell, “Classical and Quantum Electrodynamics and the $B^{(3)}$ Field” (World Scientific, 2001, sección de Omnia Opera del portal www.aias.us).
- [10] M. W. Evans y S. Kielich, “Modern Nonlinear Optics” (Wiley Interscience, 1992, 1993, 1997, 2001) en dos ediciones y seis volúmenes.
- [11] M. W. Evans y J.-P. Vigié, “The Enigmatic Photon” (Kluwer 1994 a 2002, y en la sección Omnia Opera del portal www.aias.us) en cinco volúmenes con encuadernación dura o blanda.
- [12] M. W. Evans y A. A. Hasanein, “The Photomagnetron in Quantum Field Theory” (World Scientific, 1994).