

Las Leyes de Kepler en la Teoría Orbital Tridimensional.

por

M. W. Evans y H. Eckardt,
Civil List, AIAS y UPITEC

(www.aias.us, www.atomicprecision.com, www.upitec.org, www.et3m.net
www.webarchive.org.uk)

Traducción: Alex Hill (www.et3m.net)

Resumen.

Se desarrollan las tres leyes de movimiento planetario de Kepler utilizando teoría orbital tridimensional, y se describe su efecto sobre cada una de las leyes. La teoría orbital tridimensional se desarrolla mediante coordenadas polares tridimensionales y se efectúa una comparación directa de los resultados obtenidos respecto de la teoría orbital bidimensional.

Palabras clave: teoría ECE, teoría x , leyes de Kepler de movimiento planetario.

1. Introducción.

En documentos recientes de esta serie [1-10] se ha desarrollado la teoría orbital utilizando coordenadas polares esféricas, obteniéndose muchos resultados novedosos. En general, las órbitas son tridimensionales, y en las galaxias se observan órbitas tridimensionales. En una órbita tridimensional, el parámetro radial r es en general dependiente tanto de θ como de φ del sistema de coordenadas polares esféricas. Sin embargo, puede desarrollarse la teoría para producir la dependencia de r respecto de φ y de r respecto de θ . Se ha demostrado que la conservación del momento angular no implica que las órbitas sean planas, y que la conservación del momento angular es compatible con órbitas en tres dimensiones. En general, el espacio tridimensional, de manera que la teoría orbital debiera siempre desarrollarse en tres dimensiones. Cuando esto se lleva a cabo correctamente, las tres leyes de Kepler dejan de tener una validez general.

En la Sección 2 se define el efecto de la teoría orbital en tres dimensiones para cada una de las tres leyes de Kepler, mientras que en la sección tres se analizan y representan gráficamente los resultados.

2. Las Leyes de Kepler en 3D.

La órbita en 3D se define mediante la elipse beta [1-10]:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} (1 + \epsilon \cos \beta) \quad (1)$$

donde:

$$\cos \beta = \frac{\cos \varphi}{\left(\cos^2 \varphi + \left(\frac{L_z}{L} \right)^2 \sin^2 \varphi \right)^{1/2}} \quad (2)$$

Esto se reduce a la órbita de la teoría convencional si y sólo si

$$L \rightarrow L_z \quad (3)$$

en cuyo caso:

$$\beta \rightarrow \varphi \quad (4)$$

Aquí el sistema de coordenadas polares esféricas es (r, θ, φ) . El ángulo β se define mediante

$$\dot{\beta}^2 = \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta. \quad (5)$$

La semi latitud recta es:

$$\alpha = \frac{l^2}{mk} \quad (6)$$

y la excentricidad es:

$$e^2 = 1 + \frac{2EL^2}{mk^2} \quad (7)$$

La masa m gira en órbita alrededor de una masa M y la constante k se define mediante:

$$k = mM^G \quad (8)$$

donde G es la constante de Newton. La fuerza de atracción entre m y M se supone como:

$$\underline{F} = -\frac{k}{r^2} \underline{e}_r \quad (9)$$

Donde el vector unitario radial en el sistema de coordenadas polares esféricas [11, 12] es:

$$\underline{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \underline{i} + \sin\theta \sin\varphi \underline{j} + \cos\theta \underline{k} \quad (10)$$

Esta teoría integra también es aplicable a la electrodinámica si:

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (11)$$

donde e es la carga del protón y donde ϵ_0 es la permitividad en el vacío.

La velocidad lineal se define mediante:

$$\underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin\theta \underline{e}_\varphi \quad (12)$$

donde:

$$\underline{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \underline{i} + \cos\theta \sin\varphi \underline{j} - \sin\theta \underline{k} \quad (13)$$

$$\underline{e}_\varphi = -\sin\varphi \underline{i} + \cos\varphi \underline{j} \quad (14)$$

de manera que el cuadrado de la velocidad es:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)$$

(15)

El hamiltoniano es:

$$H = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{r}$$

(16)

y el lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{k}{r}$$

(17)

Estos pueden expresarse en términos de β como:

$$H = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\beta}^2 \right) - \frac{k}{r}$$

(18)

El hamiltoniano es igual a la energía total:

$$H = E$$

(19)

de manera que:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 \right) - \frac{k}{r}$$

(20)

La Ec. (20) puede re-expresarse como la elipse beta:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \beta}$$

(21)

Con el objeto de demostrar esto escribimos:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\beta} \frac{d\beta}{dt}$$

(22)

entonces:

$$E = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \left(\left(\frac{dr}{d\beta} \right)^2 + r^2 \right) - \frac{k}{r} \quad (23)$$

A partir de la ecuación de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\beta}} \right) \quad (24)$$

con el lagrangiano (17) resulta que:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{L}{m r^2} \quad (25)$$

A partir de las Ecs. (23) y (25):

$$E = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m r^4} \left(\left(\frac{dr}{d\beta} \right)^2 + r^2 \right) - \frac{k}{r} \quad (26)$$

de manera que:

$$\left(\frac{dr}{d\beta} \right)^2 = \left(\frac{2mE}{L^2} \right) r^4 - r^2 + \left(\frac{2mk}{L^2} \right) r \quad (27)$$

A partir de la Ec. (21):

$$\frac{dr}{d\beta} = \frac{E}{\alpha} r^2 \sin \beta \quad (28)$$

y

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta = \frac{1}{e^2} \left(\frac{\alpha}{r} - 1 \right)^2 \quad (29)$$

de manera que:

$$\left(\frac{dr}{d\beta} \right)^2 = r^4 \frac{1}{\alpha^2} \left(e^2 - 1 \right) - r^2 + \frac{2r^3}{\alpha} \quad (30)$$

A partir de la Ec. (7):

$$\frac{e^2 - 1}{\alpha^2} = \frac{2mE}{L^2} \quad (31)$$

y a partir de la Ec. (6):

$$\alpha = \frac{L_z^2}{m k} \quad (32)$$

De manera que las Ecs. (27) y (30) son iguales, QED. El hamiltoniano (20) es el mismo que la elipse beta (21).

Resulta entonces que:

$$m \ddot{r} = -\frac{k}{r^2} + \frac{L_z^2}{m r^3} = -\frac{L_z^2}{m r^2} \frac{d^2}{d\beta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (33)$$

a partir de la ecuación de Binet:

$$F(r) = -\frac{L_z^2}{m r^2} \left(\frac{d^2}{d\beta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right). \quad (34)$$

A partir de las Ecs. (1) y (2) la órbita deja de ser una elipse en φ . Puede volverse algo completamente diferente de una elipse, tal como se observa en galaxias tridimensionales. La Primera Ley de Kepler establece que r como una función de φ es una elipse, pero claramente esto deja de ser cierto en tres dimensiones. Sólo se cumple para dos dimensiones, donde pueden utilizarse coordenadas polares planas.

Dado que r es una función de φ resulta que:

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\varphi \quad (35)$$

donde A es el área barrida por la curva en el tiempo t . De manera que la velocidad de área barrida es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad (36)$$

En la teoría convencional esto es igual a una constante porque:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_z}{m r^2} \quad (37)$$

donde $L_z \hat{k}$ es la componente según el eje Z del momento angular total \underline{L} . Esta es la Segunda Ley de Kepler, según la cual la velocidad de área barrida es constante. Sin embargo, en tres dimensiones:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\beta}{dt} \frac{d\varphi}{d\beta} \quad (38)$$

donde a partir del trabajo previo [1-10]:

$$\frac{d\varphi}{d\beta} = \frac{Lz}{L \sin^2 \vartheta} \quad (39)$$

Por lo tanto, en tres dimensiones, la velocidad del área barrida deja de ser constante y, en consecuencia, la Segunda Ley de Kepler deja de ser válida.

A partir del trabajo previo:

$$\sin^2 \vartheta = \left(\frac{Lz}{L} \right)^2 + \left(1 - \left(\frac{Lz}{L} \right)^2 \right) \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \left(\frac{Lz}{L} \right)^2 \sin^2 \varphi} \right) \quad (40)$$

de manera que la velocidad de barrido de área tridimensional es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{Lz}{2m} \left(\left(\frac{Lz}{L} \right)^2 + \left(1 - \left(\frac{Lz}{L} \right)^2 \right) \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \left(\frac{Lz}{L} \right)^2 \sin^2 \varphi} \right) \right)^{-1} \quad (41)$$

Esto deviene el resultado en dos dimensiones si y sólo si:

$$L \rightarrow Lz \quad (42)$$

y

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 0. \quad (43)$$

La velocidad de barrido de área desarrolla una dependencia hacia φ y se representa gráficamente en la Sección 3.

La Tercera Ley de Kepler se deduce convencionalmente en teoría orbital bidimensional utilizando:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{Lz}{2m} \quad (44)$$

de manera que:

$$dt = \left(\frac{Z_m}{L_z} \right) dA \quad (45)$$

Esta ecuación se integra para dar:

$$Z = \int_0^Z dt = \frac{Z_m}{L_z} \int_0^A dA = \frac{Z_m}{L_z} A \quad (46)$$

donde τ es el tiempo requerido para una órbita completa. Este es proporcional al área A de la órbita. En teoría de dos dimensiones, la órbita es la elipse:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \psi} \quad (47)$$

cuya área es:

$$A = \pi a b \quad (48)$$

donde a y b son los semi ejes mayor y menor respectivamente. Por lo tanto:

$$Z = \frac{Z_m}{L_z} \pi a b \quad (49)$$

y

$$Z^2 = \frac{4m^2 \pi^2}{L_z^2} a^2 b^2 \quad (50)$$

Sin embargo [12]:

$$L^2 = \alpha a \quad (51)$$

donde la semi latitud recta en teoría tridimensional es:

$$\alpha = \frac{L_z}{mk} \quad (52)$$

de manera que

$$c^2 = \left(\frac{4\pi R^2}{k} \right) a^3 \quad (53)$$

El cuadrado del tiempo requerido para completar una órbita es proporcional al cubo del semieje mayor. Esta es la versión en dos dimensiones de la Tercera Ley de Kepler.

En teoría tridimensional, como más arriba:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\phi}{dt} \frac{d\phi}{dr} \quad (54)$$

de manera que la velocidad de barrido de área es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_z}{2m \sin^2 \theta} \quad (55)$$

y

$$dt = \left(\frac{2m \sin^2 \theta}{L_z} \right) dA \quad (56)$$

Con el objeto de integrar esta ecuación hay que determinar si A posee alguna dependencia con respecto a θ . Nótese que el perihelio de la elipse beta (21) se define a través de la distancia de mayor acercamiento:

$$r_{\min} = \frac{a}{1+\epsilon} = a(1-\epsilon). \quad (57)$$

En el perihelio:

$$\cos \beta = 1, \quad \beta = 0 \quad (58)$$

A partir de la Ec. (2):

$$\psi = 0.$$

$$(59)$$

El ángulo θ se define mediante:

$$\sin^2 \theta = \left(\frac{L_z}{L} \right)^2 + \left(1 - \left(\frac{L_z}{L} \right)^2 \right) \left(\frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \psi + \left(\frac{L_z}{L} \right)^2 \sin^2 \psi} \right). \quad (60)$$

De manera que en el perihelio:

$$\cos^2 \theta = 1, \quad \theta = \pi/2. \quad (61)$$

Por lo tanto, el perihelio de la elipse beta se define mediante:

$$\beta = \varphi = 0, \quad \theta = \pi/2. \quad (62)$$

Resulta así que su área:

$$A = \pi a b \quad (63)$$

se define por los ángulos fijos en la Ec. (62) de manera que A no tienen dependencia alguna respecto de la variable θ . Análogamente, en el aphelio:

$$r = r_{\max} = \frac{a}{1-\epsilon} = a(1+\epsilon) \quad (64)$$

$$\varphi = \beta = \pi, \quad \theta = \pi/2, \quad (65)$$

a y b nuevamente se determinan mediante ángulos fijos.

Por lo tanto, la Ec. (56) puede integrarse como sigue:

$$\tau = \int_0^{\tau} dt = \frac{2m \sin^2 \theta}{L_z} \int dA = \frac{2m A \sin^2 \theta}{L_z} \quad (66)$$

que puede desarrollarse como:

$$\tau^2 = \left(\frac{4 m^2 \pi^2 \alpha \sin^4 \theta}{L_z^2} \right) a^3 \quad (67)$$

En tres dimensiones, la semi latitud recta [1-10] es:

$$\alpha = \frac{L^2}{m k} \quad (68)$$

de manera que la Tercera Ley de Kepler en 3D es:

$$z^2 = \left(\frac{4\mu P^2}{k} \left(\frac{L}{L-z} \right)^2 \sin^4 \theta \right) a^3 \quad (69)$$

donde:

$$\sin^4 \theta = \left[\left(\frac{L-z}{L} \right)^2 + \left(1 - \frac{L-z}{L} \right)^2 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \left(\frac{L-z}{L} \right)^2 \sin^2 \varphi} \right)^2 \right] \quad (70)$$

La Ec. (69) se representa gráficamente y analizan en la Sección 3.

La velocidad orbital lineal (15) también sufre cambios en teoría de tres dimensiones como sigue. Según la teoría de dos dimensiones [12] la velocidad lineal orbital es:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad (71)$$

donde la velocidad angular es:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L-z}{\mu r^2} \quad (72)$$

y

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \quad (73)$$

De manera que

$$v^2 = \frac{L-z}{\mu r^2} \left(1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 \right) \quad (74)$$

En esta expresión:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{\epsilon r^4}{\alpha^2} (1 - \cos^2 \varphi) \quad (75)$$

donde:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{\alpha}{r} - 1 \right)^2 \quad (76)$$

De manera que el cuadrado de la velocidad es:

$$v^2 = \frac{L^2}{m^2 r^2} \left(\frac{E^2 - 1}{\alpha} + \frac{2}{r} \right)$$

$$= MG \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\alpha} \right)$$

(77)

Sin embargo, en teoría 3D:

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2$$

(78)

y la velocidad angular se cambia a:

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} = \frac{L}{m r^2}$$

(79)

Una comparación directa de las Ecs. (71) y (78) puede efectuarse de la siguiente manera. Los resultados se representan gráficamente en la Sección 3. En dos dimensiones:

$$\dot{r} = \left(\frac{2}{m} \left(E - \frac{L^2}{2m r^2} + \frac{k}{r} \right) \right)^{1/2}$$

(80)

donde:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \psi}$$

(81)

y

$$\dot{\psi} = \frac{L}{m r^2}$$

(82)

de manera que v puede representarse gráficamente como una función de ψ .

En tres dimensiones, la cadena de ecuaciones relevante [1-10] es:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta \right)$$

(83)

donde:

$$\dot{r} = \left(\frac{2}{m} \left(E - \frac{L^2}{2m r^2} + \frac{k}{r} \right) \right)^{1/2}$$

(84)

$$\dot{\psi} = \frac{L}{m r \sin^2 \theta}$$

(85)

$$\dot{\theta} = \frac{1}{m r^2} \left(L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2 \theta} \right)^{1/2} \quad (86)$$

$$r = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \beta} \quad (87)$$

$$\cos \beta = \cos \varphi \left(\cos^2 \varphi + \left(\frac{L}{L_z} \right)^2 \sin^2 \varphi \right)^{-1/2} \quad (88)$$

$$\sin^2 \theta = \left(\frac{L}{L_z} \right)^2 + \left(1 - \left(\frac{L}{L_z} \right)^2 \right) \left(\frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \left(\frac{L}{L_z} \right)^2 \sin^2 \varphi} \right) \quad (89)$$

De manera que ν puede representarse gráficamente como una función de φ en tres dimensiones, y el resultado puede compararse directamente con la teoría bidimensional.

En estas ecuaciones:

$$\cos \beta = \cos \varphi \left(\cos^2 \varphi + \left(\frac{L}{L_z} \right)^2 \sin^2 \varphi \right)^{-1/2} \quad (90)$$

$$\text{y} \quad \sin \beta = - \frac{L \cos \theta}{(L^2 - L_z^2)^{1/2}} \quad (91)$$

de manera que resulta:

$$\beta = \frac{1}{2} \left[\cos^{-1} \left(\frac{\cos \varphi}{\left(\cos^2 \varphi + \left(\frac{L}{L_z} \right)^2 \sin^2 \varphi \right)^{1/2}} \right) - \sin^{-1} \left(\frac{L \cos \theta}{(L^2 - L_z^2)^{1/2}} \right) \right] \quad (92)$$

y pueden construirse representaciones gráficas de este tipo.

3. Representaciones gráficas y análisis .

Primero analizamos el rango de los ángulos β y θ . El problema con el rango angular de las funciones trigonométricas inversas quedó resuelto. Tanto β como φ presentan un rango entre 0 y 2π . Si $\varphi > \pi$, debe de utilizarse

$$\beta = 2\pi - \beta(\varphi) \quad (93)$$

donde $\beta(\varphi)$ se define mediante la Ec.(2) original en la Sección 2. Para θ se mantiene, análogamente:

$$\theta = \pi - \theta(\varphi) \quad (94)$$

con $\theta(\varphi)$ dado por la Ec.(40). Esto conduce a curvas suaves y diferenciables, véanse las Figs 1-3. Los parámetros fueron $L = 3$; $L_z = 1$; $m = k = 1$; $E = -0.04$, de lo cual resulta $\alpha = 9$; $\varepsilon = 0.529$. En particular, tanto el afelio como el perihelio aparecen claramente en la Fig. 1.

La dependencia de β respecto de θ puede comprenderse de la siguiente manera. Además del problema de la continuación de la dependencia respecto de φ , existe el problema de que, para una vuelta completa en la órbita, θ varía desde 0 hasta π y nuevamente hasta 0 . Esto significa que hay dos puntos (o sea valores de φ ó β) por cada valor de θ . Por lo tanto, la dependencia de $\varphi(\theta)$ ó $\beta(\theta)$ no es única, sino que debe extenderse a dos valores, véase la Fig. 4. Para las representaciones gráficas, resulta más sencillo (y probablemente más instructivo) concentrarse en la dependencia respecto de φ .

Las superficies en tres dimensiones de $r(\theta, \varphi)$ para las órbitas cónicas

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos \beta} \quad (95)$$

se muestran en las Figs. 5-9. La dependencia respecto de φ viene dada por la Ec.(90) y la dependencia respecto de θ viene dada por la Ec.(91). Ambas pueden sumarse para obtener una dependencia mixta φ/θ para la Ec.(92). Además, puede utilizarse tanto la rama superior como la inferior de la función $\beta(\theta)$ en la Fig.4. Como resultado, ambas ramas conducen a superficies toroides (Figs. 6-7), y en total esto da origen a un elipsoide (Fig. 8). La combinación de la dependencia φ/θ según la Ec.(92) da una superposición de ambas superficies (Fig. 9).

Las otras figuras muestran ejemplos de una órbita en espiral hiperbólica

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{\beta}} \quad (96)$$

con un valor constante para r_0 . Se han aplicado las mismas clasificaciones para las superficies elipsoides (Figs. 10-14). Además del plano en dos dimensiones que ya conocemos de cálculos previos, existe un chorro eyectado según el eje Z , véase la Fig. 11. En combinación

con la dependencia respecto de θ y φ , esto conduce a un disco con un espesor finito y a un chorro, muy similar a lo observado con algunas galaxias (Fig. 13). De manera que podemos describir galaxias en espiral con "espesor".

En la Fig. 15 se representó gráficamente un ejemplo de órbitas tridimensionales elipsoides/cónicas. Éstas deben de pensarse como líneas sobre las superficies mostradas previamente. Para $L_z \ll L$, la órbita resulta diferente de una elipse. Cuando L_z se aproxima a L esto constituye una transición al caso bidimensional, y la elipse rota hacia el plano XY . Todas las curvas pasan por los puntos $\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$ y $\theta = \pi$, $\varphi = \pi$ y se mueven en el semiespacio superior o inferior, respectivamente. Las escalas de longitud se han adoptado para la construcción de las gráficas.

El tiempo de cobertura de área τ (la Ec.(69)) varía en función de φ en la teoría tridimensional, y se vuelve constante en el límite de $L_z \rightarrow L$ (Fig. 16). La velocidad lineal (Fig. 17) posee una expresión bastante compleja en tres dimensiones (Ecs. (83-89)) pero puede calcularse y también se aproxima al límite bidimensional. En la órbita tridimensional hay un rango mínimo más amplio, es decir que el movimiento es más lento en el afelio y más veloz en el perihelio si se le compara con las órbitas elípticas en dos dimensiones.

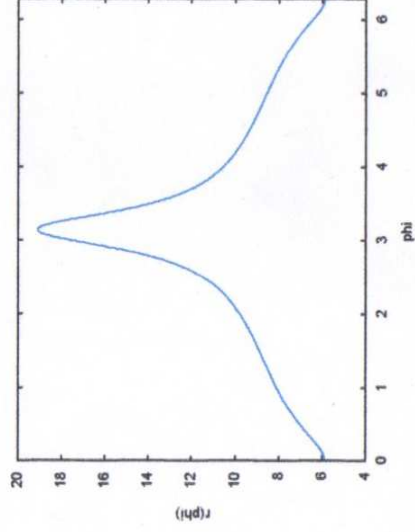


Figura 1: órbita elíptica $r(\varphi)$ para $L = 3$; $L_z = 1$.

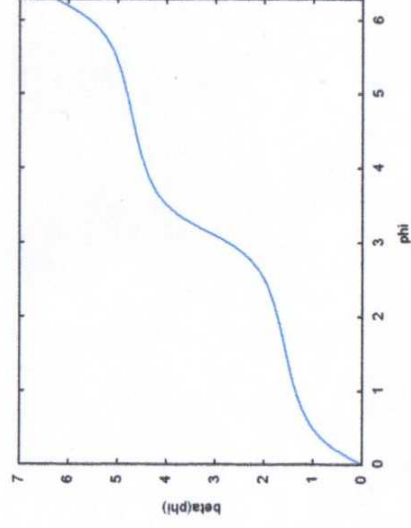


Figura 2: dependencia angular $\beta(\varphi)$.

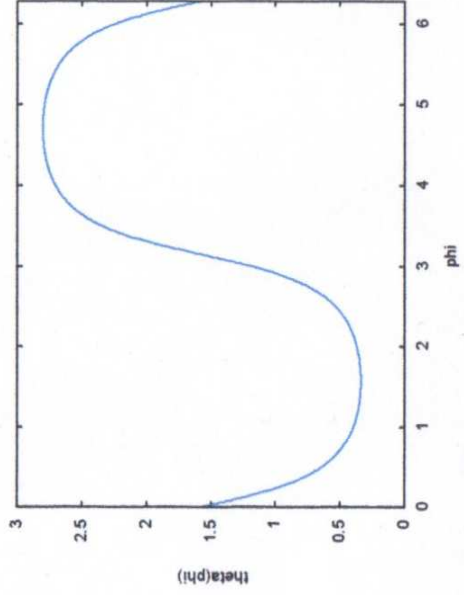


Figura 3: dependencia angular $\theta(\varphi)$.

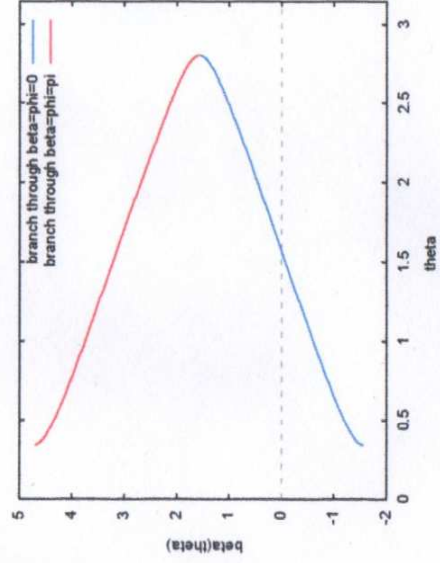


Figura 4: dependencia angular $\beta(\theta)$ con dos ramas.

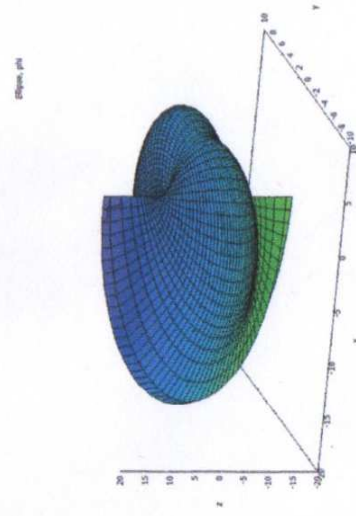


Figura 5: superficie de órbita elíptica para φ .

Elipse, Rama Inferior

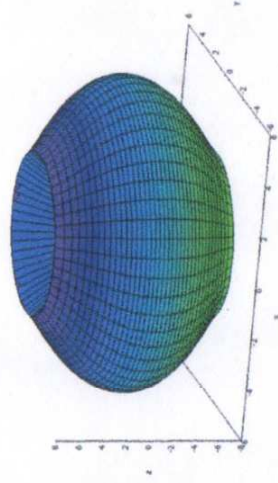


Figura 6: superficie de órbita elíptica para θ , rama inferior.

Elipse, Rama Superior

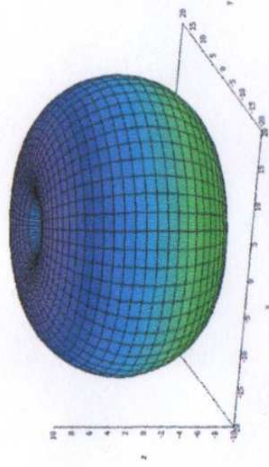


Figura 7: superficie orbital elíptica para θ , rama superior.

Elipse, Rama Superior e Inferior

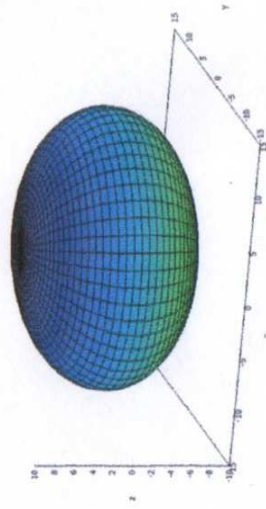


Figura 8: superficie orbital elíptica para θ , combinación de rama inferior y superior.

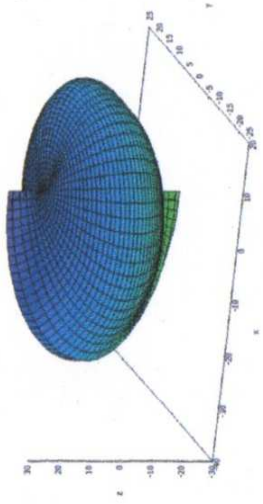


Figura 9: superficie orbital elíptica para φ y θ , rama inferior y superior combinadas.

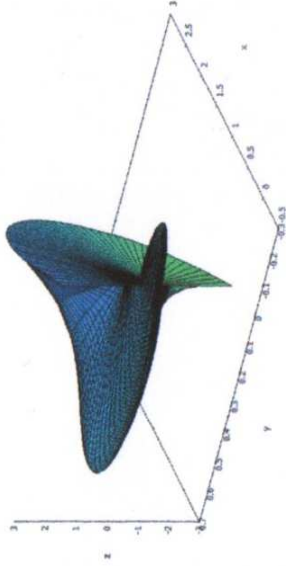


Figura 10: superficie de órbita hiperbólica para φ .

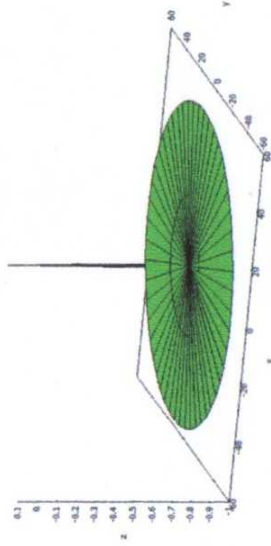


Figura 11: superficie de órbita hiperbólica para θ , rama inferior.

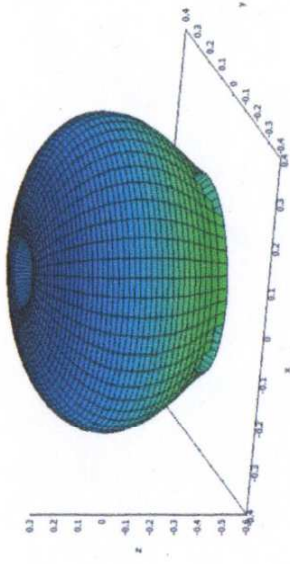


Figura 12: superficie de órbita hiperbólica para θ , rama superior.

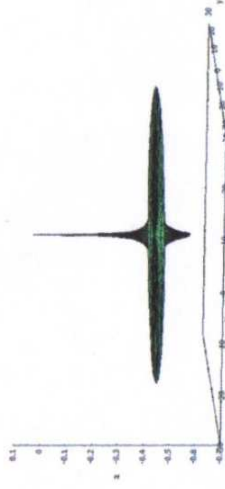


Figura 13: superficie de órbita hiperbólica para θ , rama inferior y superior combinadas.

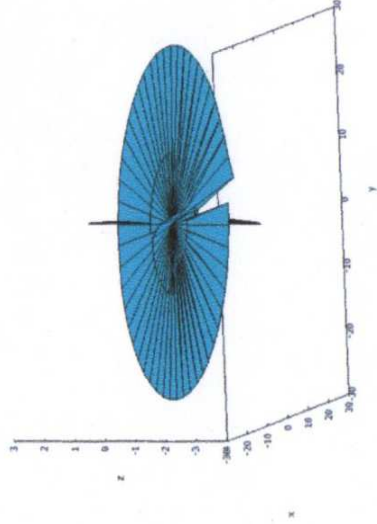


Figura 14: superficie de órbita hiperbólica para ϕ y θ , rama inferior y superior combinadas.

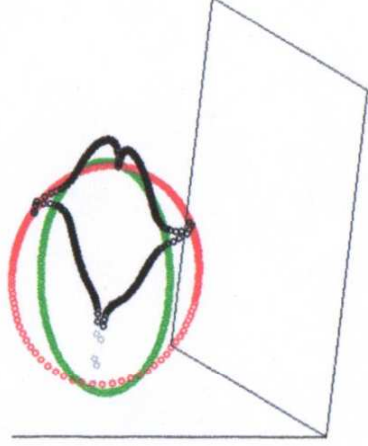


Figura 15: órbitas elípticas con $L = 3$ para $L_z = 0.1$ (negra), $L_z = 1$ (roja), $L_z = 2.99$ (verde).

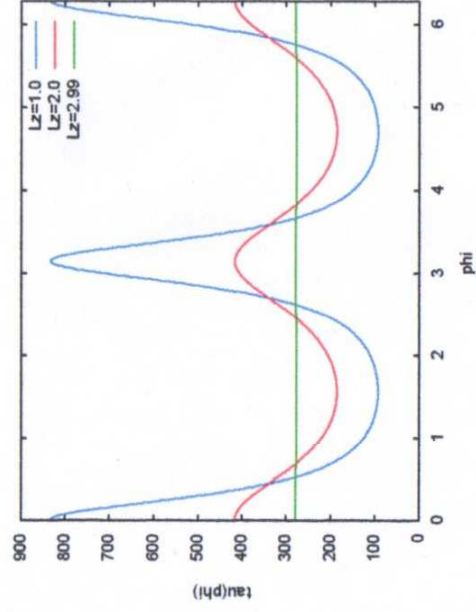


Figura 16: Área barrida multiplicada por $\tau(\phi)$ con $L = 3$ y variando L_z .

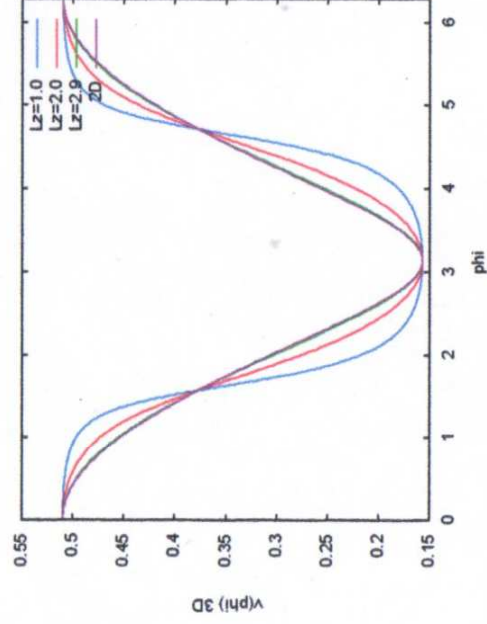


Figura 17: velocidades lineales $v(\phi)$ para el caso de 2D y los casos de 3D con $L = 3$ y variando L_z .

Agradecimientos.

Se agradece al Gobierno Británico por la Pensión Civil Vitalicia, y al personal técnico de AIAS y otros por muchas discusiones interesantes. Se agradece a Dave Burleigh por las publicaciones en red, a Alex Hill y a Robert Cheshire por las traducciones, publicaciones y grabaciones.

Referencias bibliográficas.

- [1] M .W. Evans, Ed., “Definitive Refutations of the Einsteinian General Relativity” (Cambridge International Science publishing, CISP, www.cisp-publishing.com, 2012).
- [2] M .W. Evans, H. Eckardt, D. W. Lindstrom y S. J. Crothers, “Principles of ECE Theory” (preimpresión en el portal www.aias.us).
- [3] M .W. Evans, S. J. Crothers, H. Eckardt y K. Pendergast, “Criticisms of the Einstein Field Equation” (CEFE en el portal www.aias.us, CISP 2011).
- [4] M .W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, “Generally Covariant Unified Field Theory” (Abramis, 2005 a 2011) en siete volúmenes.
- [5] L. Felker, “The Evans Equations of Unified Field Theory” (Abramis 2007). Hay traducción al castellano por Alex Hill, de libre acceso, en el portal www.aias.us.
- [6] M .W. Evans, H. Eckardt y D. W. Lindstrom, documentos científicos y plenarios.
- [7] M .W. Evans y L. B. Crowell, “Classical and Quantum Electrodynamics and the B(3) Field” (World Scientific, 2001).
- [8] M .W. Evans y S. Kielich Eds., “Modern Nonlinear Optics” (Wiley Interscience, Nueva York, 1992, 1993, 1997, 2001) en dos ediciones y seis volúmenes.
- [9] M . W. Evans y J.-P. Vigié, “The Enigmatic Photon” (Kluwer, Dordrecht, 1994 a 2002) en diez volúmenes con encuadernación dura y blanda.
- [10] M . W. Evans y A. A. Hasanein, “The Photomagnetron in Quantum Field Theory” (World Scientific, 1994).
- [11] E. G. Milewski, Ed., “The Vector Analysis Problem Solver” (Research and Education Association, Nueva York, 1987, impresión revisada).
- [12] J. M. Marion y S. T. Thornton, “Classical Dynamics of Particles and Systems” (Harcourt, Nueva York, 1988, tercera edición).