Las ecuaciones de Evans de la teoría del campo unificado

Laurence G. Felker

Capítulo 9

Responsable de la traducción al castellano:

Ing. Alex Hill
ET3M
México

Favor de enviar críticas, sugerencias y comentarios a alexhill@et3m.net

o visitando la página www.et3m.net y dejando allí su comentario.

Gracias.

Capítulo 9   Las ecuaciones de Dirac, Klein-Gordon y Evans

> La determinación del movimiento estable de los electrones en el átomo introduce el empleo de números enteros, y hasta este momento los únicos fenómenos que involucran en la física a números enteros han sido los de interferencia y de modos normales de vibración. Este hecho me sugirió la idea de que también los electrones no debieran considerarse simplemente como partículas, sino que deben asignárseles frecuencias, es decir propiedades ondulatorias.
>
> Louis de Broglie, 1929

Introducción

Arribaremos a dos importantes nuevas ecuaciones:

$$E = \hbar c \sqrt{|R_0|} \quad (1)$$

Aquí, E es la energía total, ħ es h/2π o la constante de Dirac, c es la velocidad de las ondas electromagnéticas, y R_0 es la curvatura del espaciotiempo en el límite inferior. Esto nos da como resultado el principio de mínima curvatura.

También obtenemos una nueva relación fundamental:

$$mV_0 = k\,\hbar^2 / c^2 \quad (2)$$

donde m es la masa, V_0 es el volumen de una partícula en el límite inferior, y k es la constante de Einstein. La implicación aquí es que existe un volumen mínimo de partícula, el cual puede definirse a partir de constantes básicas - G, c y ħ , y que no hay singularidades en la física

Se establece un vínculo con estas ecuaciones entre la relatividad general y la mecánica cuántica a nivel más básico.

Antes de observar la ecuación de Dirac obtenida a partir de la Ecuación de Onda de Evans, recordaremos algunos conceptos básicos.

El número de onda puede definirse de dos maneras diferentes:

$$\kappa = 2\pi/\lambda \;\; ó \;\; \kappa = 1/\lambda \quad (3)$$

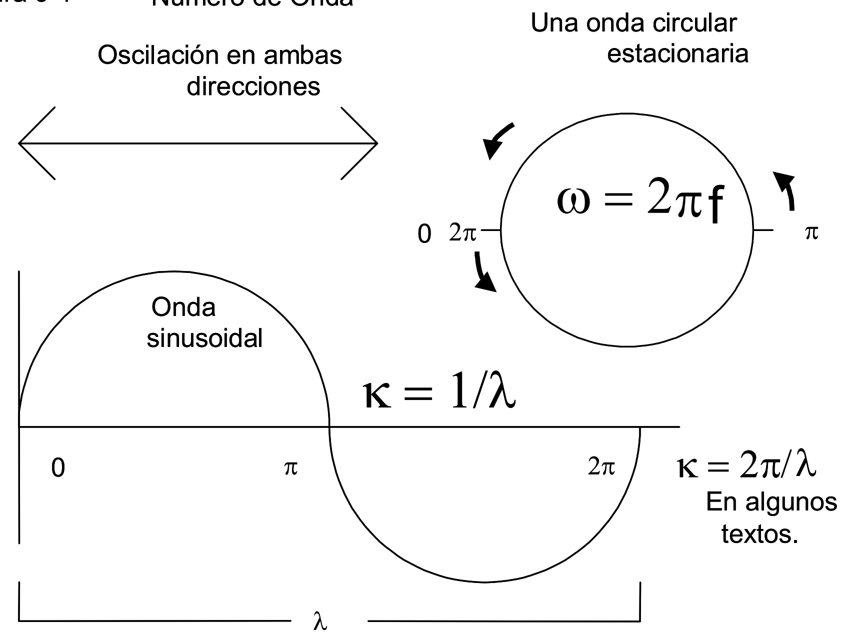
donde λ es la longitud de onda. Aquí utilizaremos la segunda forma. Puede aplicarse a ondas electromagnéticas o a ondas de partículas.

ω εs la frecuencia angular, medida en unidades de rotaciones por segundo. Se define:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/t \quad (4)$$

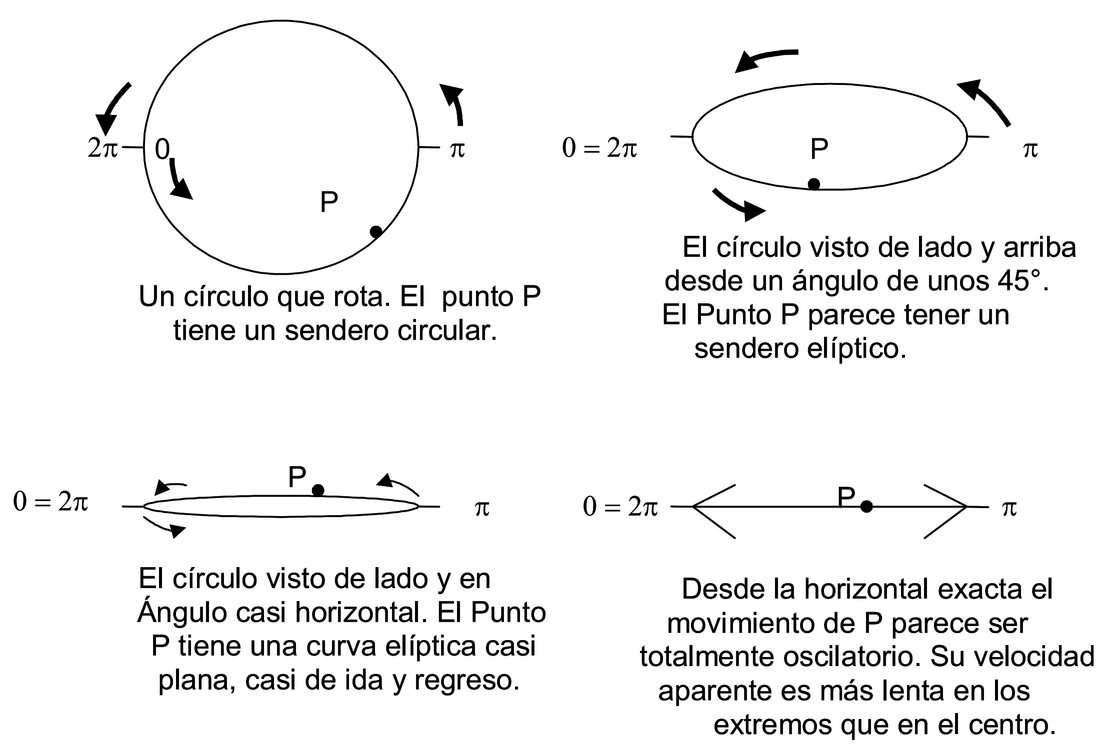
donde f= 1/t, f es frecuencia y t es tiempo.   Entonces, $\omega = 1$ cuando hay una rotación por segundo. Véanse las Figuras 9-1 y 9-2.

Figura 9-1   Número de Onda



0 y 2π son el mismo punto. En una oscilación o movimiento circular esto resulta claro, pero en la onda sinusoidal no lo es a primera vista. Un alto valor de κ Implica longitudes de onda cortas y energéticas.

Figura 9-2   Equivalencia de oscilación y movimiento circular.



La longitud de onda de Compton es la de un fotón que posee la misma energía que la masa de una partícula. Otra descripción es que si la masa en un electrón se convirtiese a un fotón, dicho fotón tendría la frecuencia asociada con la longitud de onda de Compton. En otras palabras, si un dado fotón de frecuencia x se convirtiese a masa, dicha partícula tendría la misma frecuencia. La longitud de onda de Compton es:

$$\lambda_c = \hbar / mc \tag{5}$$

La longitud de onda de Compton es una medida de energía.

El electrón se mueve siguiendo complejos patrones de onda estacionaría, los cuales son estables por resonancia alrededor del núcleo de un átomo. Cuando se encuentra libre, el electrón se comporta más como una onda de partícula que viaja a través del espaciotiempo.

La longitud de onda de de Broglie describe al electrón libre como una onda estacionaría, con una frecuencia angular como cualquier otra onda. Esto constituye la base de la dualidad onda-partícula de la mecánica cuántica.

$$\lambda_{de\ B} = \hbar / p = \hbar / mv \tag{6}$$

donde $\lambda_{de\ B}$ es la longitud de onda de de Broglie, $\hbar$ es la constante de Dirac y p= mv es el momento.

Podemos asociar las longitudes de onda de de Broglie y de Compton como describiendo ambas dos aspectos del mismo proceso. Las longitudes de onda de Compton y de de Broglie son descripciones de energía.

También recordamos las ecuaciones cuántica básica y de la energía de Einstein:

$$E = nhf \tag{7}$$

$$E = mc^2 \tag{8}$$

Aquí, E es la energía, n es el número cuántico, h es la constante de Planck, f es la frecuencia, m es la masa y c es la velocidad de las ondas electromagnéticas. Estas ecuaciones vinculan a la relatividad y a la mecánica cuántica, dando $nhf=mc^2$.

Es decir, que la acción de Planck por la frecuencia resulta = a la masa o energía.

Las ecuaciones básicas para la curvatura son:

$$\kappa = 1/r \tag{9}$$

donde r es el radio de un círculo oscilante que toca un punto en una curva.

Y

$$R = \kappa^2 \tag{10}$$

donde κ es la curvatura y R es la curvatura escalar.

En algunos textos se emplea la letra latina k para expresar el número de onda y la curvatura. Aquí utilizamos sólo la letra griega kapa , κ , para describirlos.

Sabemos que la curvatura del espaciotiempo aumenta a medida que aumenta la masa-energía. Ejemplos sencillos de esto son la contracción de Lorentz a medida que una partícula aproxima su velocidad a c, y el encogimiento de un agujero negro hasta alcanzar casi el tamaño de un punto a medida que aumenta la masa. Los volúmenes de los marcos de referencia para una densidad de energía alta se encuentran altamente comprimidos en comparación con, y cómo se les ve desde, regiones de densidad de energía baja como es el caso de nuestro espaciotiempo sobre la Tierra.

A medida que aumenta la energía de una onda, su frecuencia aumenta y disminuye su longitud de onda. Esto es análogo a aquello observado en relatividad pura.

Las ecuaciones de Dirac y de Klein-Gordon

La ecuación de Dirac en su forma original es:

$$(i\,\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu} - mc/\hbar)\,\psi = 0 \tag{11}$$

donde i es $\sqrt{-1}$ y γ^{μ} designa las matrices de Dirac.

La ecuación de Dirac es una ecuación de onda válida en relatividad restringida, en tanto que la ecuación de Schrödinger sólo aplica para espacios euclidianos. La Ecuación de onda de Evans también es válida en relatividad general, y por lo tanto sustituye a la ecuación de Dirac en física teórica.

La ecuación de ondas de Evans es

$$(\Box + kT)q^{a}{}_{\mu} = 0 \tag{12}$$

donde $\Box$ es el operador de d'Alembert, k es la constante de Einstein, T es la forma contraída normalizada del tensor canónico de momento de energía, y $q^{a}{}_{\mu}$ es la tétrada.

Esto podría expresarse como:

$$(\Box + kT)\,\gamma^{\mu} = 0 \tag{13}$$

donde γ^{μ} es la matriz de Dirac generalizada para espaciotiempo no euclidiano. Es una matriz de 4 x 4 relacionada con la tétrada.

En relatividad restringida, las ecuaciones de Dirac y de Klein-Gordon poseen la misma forma que la ecuación de onda de Evans[1]. La ecuación de Dirac puede escribirse como:

$$(\Box + 1 / \lambda_c^2)\, \psi = 0 \tag{14}$$

donde λ_c es la *longitud de onda de Compton* y ψ es el 4-espinotensor. La ecuación de Klein-Gordon puede expresarse como:

$$(\Box + (mc/\hbar^2)\,)\, \phi = 0 \tag{15}$$

esto es equivalente a:

$$(\Box + kT)\, \psi^a{}_\mu = 0 \;\; \text{ó} \;\; (\Box + (mc/\hbar^2))\psi \tag{16}$$

donde $\psi^a{}_\mu$ es una tétrada.

Por lo tanto, podemos ver que kT → $(mc/\hbar)^2 = 1/\lambda_c^2$ en el límite de campo débil del espaciotiempo plano. Es decir, que kT se aproxima a $(mc/\hbar)^2$ y $1/\lambda_c^2$. La densidad de energía de tensión de Einstein y la energía de Dirac se aprecian como equivalentes en el límite del campo débil. La energía de la ecuación de Klein-Gordon se reinterpreta como equivalente a kT, y no posee soluciones negativas. La ecuación de Klein-Gordon, como fue interpretada originalmente, posee soluciones negativas. Dado que se consideraba a las soluciones como probabilidades, y las probabilidades no pueden ser negativas, se consideraba a esta ecuación como defectuosa. Ahora podemos ver que no es así.

En relatividad general, la ecuación deviene:

$$(\Box + kT)\, \psi = 0 \tag{17}$$

donde

$$\psi = \begin{pmatrix} q_1^{(R)} \\ q_2^{(R)} \\ q_1^{(L)} \\ q_2^{(L)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{(R)} \\ q^{(L)} \end{pmatrix}$$

donde los índices denotan 2-espinotensores de derecha (R) y de izquierda (L).

[1] $(\Box + \kappa_0^2)\, \phi = 0$ es la forma general. Nótese que $\kappa_0^2 = 1/\lambda_c^2$ y la longitud de onda de Compton se deriva a partir de la curvatura escalar en la teoría del campo unificado de Evans en el límite de relatividad restringida. Esto permite equiparar (unificar) la curvatura con la longitud de onda.

No hemos discutido el tema de los espinotensores en este libro. Son algo parecido a la raíz cuadrada de un vector. Cuando observen estas ecuaciones, traten de imaginar lo anterior; puede que ayude a comprenderlo.

En la derivación de la ecuación de Dirac, uno comienza con la ecuación de onda, y el primer paso es la transformación del 4-vector en un 2-espinotensor métrico. El 2-espinotensor luego se desarrolla para transformarse en un 4-espinotensor con la aplicación de la paridad.

El análisis de espinotensores se vuelve necesario para demostrar que puede expresarse como una tétrada de 2 x 2, $\psi^{a}{}_{\mu}$. .

Entonces es posible acercarse al límite del espaciotiempo plano al reconocer que

$$kT \to (mc/\hbar)^2 \tag{18}$$

y llegamos a la ecuación de Dirac con un 4 espinotensor métrico adimensional[2].

Utilizando las ecuaciones (5) y (10) podemos ver ahora que:

$$1/\lambda_c^2 = (mc/\hbar)^2 = kT_0 = R_0 = \kappa_0^2 \tag{19}$$

Cualquiera de estas equivalencias puede utilizarse cuando sea necesario, como por ejemplo:

$$\lambda_c = R_0^{-1/2} \tag{20}$$

Esto nos permite igualar elementos de curvatura y relatividad general con mecánica cuántica y ecuaciones de onda. Podemos sustituir a cualquiera de las anteriores entre sí. La longitud de onda de Compton es la curvatura en reposo, en unidades de $1/m^2$. Es la inversa de la curvatura elevada al cuadrado. Es posible definir cualquier curvatura escalar como el cuadrado de un número de onda.

La derivación de Evans de la ecuación de onda de Dirac muestra que la partícula debe poseer helicidad positiva o negativa (derecha o izquierda) y ofrece más información que la ecuación original de Dirac.

La ecuación de Dirac es bien conocida en la mecánica cuántica. Se ha deducido ahora a partir de relatividad general mediante el empleo de geometría.

No se efectuaron suposiciones probabilísticas en la derivación de la misma y se requiere de una reinterpretación del significado de la teoría cuántica.

Puede deducirse la ecuación de Schrödinger a partir de la ecuación de Dirac.

[2] El Profesor Evans afirmó, “La ecuación de Dirac puede entonces expresarse con matrices de Dirac. La ecuación inicial se obtiene a partir de la diferenciación covariante de la nueva condición de compatibilidad métrica del postulado de la tétrada, $D_\nu q^a{}_\mu = 0$ en el cuatro vector métrico.”

Así, vemos varias ecuaciones básicas de la física deducidas a partir de las ecuaciones de Evans. El principio de Einstein afirma que las ecuaciones de la física deben ser geometría, y ello se cumple en este caso.

Las componentes de R = -kT que se originan en la energía de reposo son la longitud de onda de Compton en relatividad restringida. R es el límite inferior en la curvatura mínima y constituye un ejemplo del principio de Evans de mínima curvatura.

R no puede volverse igual a cero. Si fuese cero entonces el espaciotiempo sería plano y vacío. No habría universo en esa región.

Longitud de onda de Compton y curvatura de reposo

La curvatura de reposo es la curvatura mínima asociada con cualquier partícula. La curvatura de reposo es la inversa de la longitud de onda de Compton elevada al cuadrado.

$$|R_0| = 1/\lambda_c^2 = (mc/\hbar)^2 \tag{21}$$

Entonces:

$$\sqrt{|R_0|} = mc/\hbar \tag{22}$$

$$\hbar \sqrt{|R_0|} = mc \tag{23}$$

$$\hbar\, c \sqrt{|R_0|} = mc^2 \tag{24}$$

y dado que mc^2 es energía, reordenando se obtiene:

$$E = mc^2 = \hbar c \sqrt{|R_0|} \tag{25}$$

Dado que $E = hf = \hbar\omega$, la curvatura de reposo se relaciona con la energía de reposo.

En relatividad general, se sabe ahora acerca de la existencia del cuanto de energía y es, para cualquier partícula o el fotón:

$$E = \hbar c \sqrt{|R_0|} \tag{26}$$

Esto relaciona la ley de Planck y el dualismo onda-partícula de de Broglie.

La longitud de onda de Compton es la curvatura de reposo en unidades de inversa de metros cuadrados. La curvatura escalar se relaciona con la longitud de onda de Compton. La longitud de onda de Compton es característica de la masa de cada partícula, y por lo tanto la curvatura escalar de Einstein se reúne con la teoría cuántica en la teoría del campo unificado de Evans.

$E = \hbar c\sqrt{|R_0|}$

Esto es una ecuación de relatividad general, no de mecánica cuántica.

La mecánica cuántica emerge a partir de la relatividad general.

La importancia de esto es que éste término es una curvatura escalar característica de la naturaleza ondulatoria de una partícula. La longitud de onda se relaciona con una curvatura de reposo, que es R_0 y se define mediante la masa. Esta constituye una expresión de la dualidad onda-partícula.

La función de onda se deriva a partir de la métrica, lo cual constituye un importante nuevo procedimiento que define la ecuación que Dirac en relatividad general. La función de onda se deduce como siendo una propiedad del espaciotiempo de Evans.

Puede desarrollarse la relación $R_0 = -(mc/\hbar)^2$. En otras palabras, si una partícula posee una masa m, entonces la curvatura queda definida en términos de c y $\hbar$, las cuales son constantes fundamentales.

El principio de mínima curvatura:

La mínima curvatura que define la energía de reposo de una partícula es, en el límite de relatividad restringida:

$$\mathbf{R_0 = -(mc/\hbar)^2}$$

Relación entre r y λ

El profesor Evans señala la relación entre la curvatura y la longitud de onda. Podemos analizarla aquí con un poco más de detalle. El material especulativo en este caso proviene principalmente de este autor. Las ecuaciones son el Profesor Evans.

La Figura 9-3 muestra la geometría en dos dimensiones de $r = \lambda$, curvatura = relación de longitud de onda. Podemos imaginar en tres o cuatro dimensiones que λ = la longitud AB es un volumen. A medida que el espaciotiempo se comprime como un acordeón, la longitud AB permanece constante y deviene la distancia a lo largo de la onda mientras que disminuye λ. r es una medida de λ y se utiliza para definir la curvatura. La compresión del espaciotiempo es la onda. Un fotón de alta energía posee una longitud de onda muy corta. Una onda electromagnética, un fotón, constituye el espaciotiempo mismo girando. Es decir, no "posee" curvatura y torsión, sino que se trata de curvatura y torsión del espaciotiempo.

λ es física y r es matemáticas. A partir de r obtenemos κ, $|R_0|$, y kT. A partir de λ obtenemos $(\hbar/mc)^2$. Mezclándolos obtenemos la teoría del campo unificado.

Uno se pregunta aquí si no habremos estado buscando el origen del universo en el extremo equivocado del mismo. Resulta igualmente probable que la densidad de energía alta cerca de la singularidad - y que denominamos precursora de la Gran Explosión (Big Bang) - sea el resultado final de la geometría luego de la compresión. La curvatura y la longitud de onda se originan juntas en el escenario ilustrado en la Figura 9-3. La onda electromagnética es doblada o comprimida - el acordeón. La curvatura se origina simultáneamente. Las matemáticas son la primera indicación de que ello ocurre, y la descripción pictórica no entra en conflicto con la lógica mecánica. En la Figura 9-4 se ofrece una descripción adicional.

Sólo en el límite de la relatividad restringida se tiene que $r = \lambda$.

Figura 9-3 Relación entre curvatura y longitud de onda.

Dado $\kappa_0^2 = 1/\lambda_c^2$ y $1/r = \kappa_0 = 1/\lambda_c$ Entonces $r = \lambda_c$

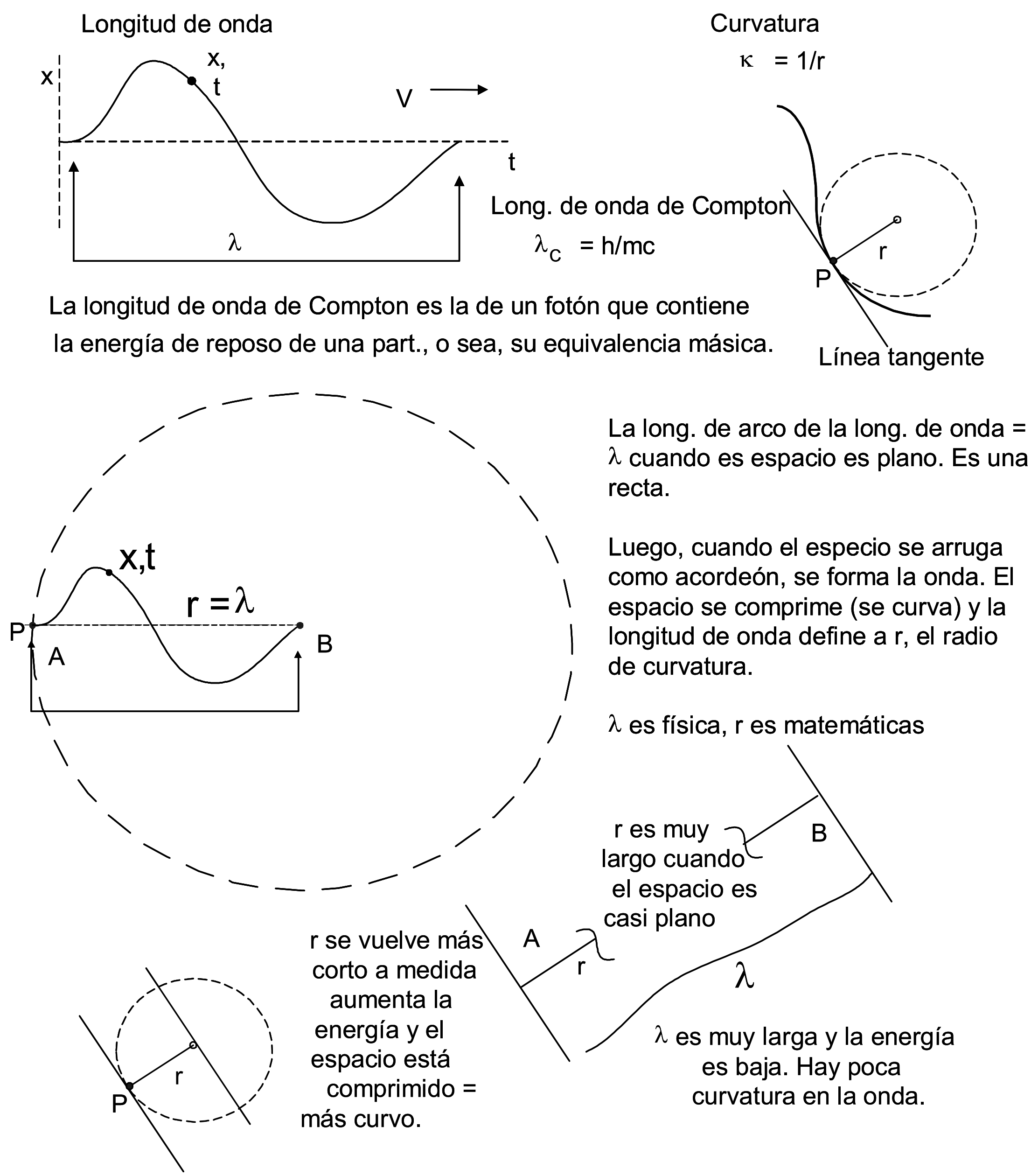
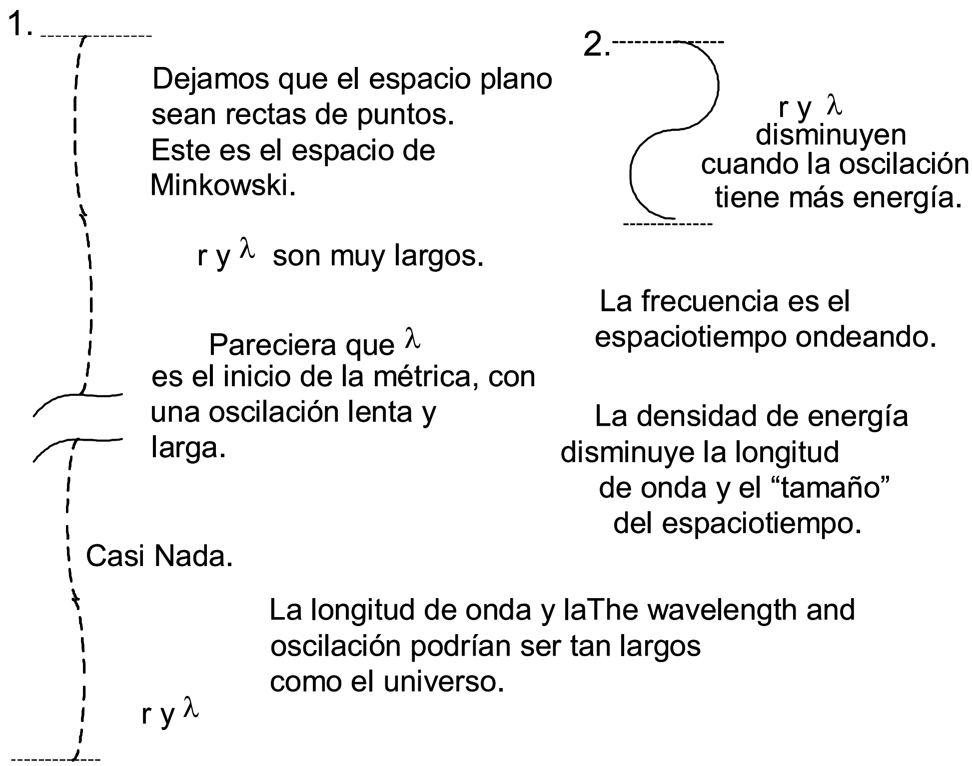


Figura 9-4 Curvatura y Longitud de Onda



Derivación de la relación inherente masa-volumen de una partícula

Tenemos $kT_0 = |R_0| = \kappa_0^2 = 1/\lambda_c^2 = (mc / \hbar)^2$. Aquí $k = 8\pi G/c^2$, que es la constante de Einstein. T_0 es la energía de tensión en el límite inferior.

En el límite del campo débil sabemos que $T_0 = m/V_0$, o simplemente densidad de masa.

Sustituyendo, obtenemos

$$kT_0 = k\, m / V_0 \qquad (27)$$

y de más arriba $kT_0 = (mc / \hbar)^2$

$$k\, m / V_0 = (mc / \hbar)^2 \qquad (28)$$

Luego de reordenar y cancelar m, obtenemos

$$mV_0 = k\, \hbar^2 / c^2 \qquad (29)$$

$$V_0 = k\, \hbar^2 / mc^2$$

Y dado que $E = mc^2$

$$V_0 = k\,\hbar^2 / E \qquad (30)$$

Esto significa que el producto de la masa en reposo y el volumen en reposo de una partícula es una constante universal en términos de la relatividad general de Einstein y la constante de Planck.

No es posible tener partículas puntuales. Esto ha constituido un problema en teoría cuántica en el pasado. Una partícula posee energía. Si al mismo tiempo no posee volumen, entonces la densidad de energía resulta infinita. La renormalización utilizó un volumen mínimo arbitrario a fin de evitar esta situación. Una solución similar pero más precisa resulta clara - existe un volumen mínimo y viene dado por la ecuación mV_0. No es necesaria una renormalización si viene dado el volumen. La renormalización fue muy exitosa y ahora puede utilizarse el volumen real.

Es un hecho bien reconocido que la masa-energía y el volumen se encuentran relacionados en forma inversa.

La longitud de onda de un fotón de alta energía es pequeña. A medida que aumenta la energía, la longitud de onda disminuye. Se almacena más en una región más pequeña - tal como se observa a partir de nuestro marco de referencia de baja energía.

En relatividad restringida tenemos la contracción de Lorentz-Fitzgerald. A medida que se incrementa la energía cinética, se contrae el marco de referencia en las direcciones en que se incrementa la energía, tal como se observa a partir de un marco de referencia de baja densidad de energía. Estas direcciones son una dimensión espacial y una temporal en relatividad restringida. En relatividad general son las direcciones espaciales.

A medida que aumenta la masa más allá de ciertos límites, disminuye el volumen. El agujero negro es el ejemplo más frecuente. Más allá de cierto umbral, el espaciotiempo se colapsa hasta transformarse en un punto. Un agujero negro de Kerr girando es más pequeño que un agujero de Schwarzschild que no gira. La energía de espín comprime el espaciotiempo.

Puede que uno suponga tentativamente que la ecuación de curvatura de Evans expresada más arriba puede aplicarse a un agujero negro al igual que con una partícula. No existe una singularidad en el centro de un agujero negro. Existe un volumen mínimo, dado que mV_0 es siempre>0.

Partículas

Puede afirmarse que las partículas son regiones discretas del espaciotiempo ocupadas por una onda estacionaría. Quizá sea más preciso afirmar que las partículas son ondas estacionarías del espaciotiempo. El concepto de campo las describe matemáticamente. Una partícula cuya masa en reposo es igual a cero sólo es frecuencia - eso es un fotón. Su momento es número de onda. No pueden existir puntos con un volumen igual a cero. En tanto haya energía o masa, habrá presente alguna curvatura del espaciotiempo.

Al tiempo de escritura de estas líneas no existe aún una definición precisa de la partícula en términos de curvatura y torsión, pero resulta obvio que ésta habrá de obtenerse.

La forma del electrón[3]

Podemos esperar descubrimientos interesantes en el futuro utilizando el principio de mínima curvatura y le ecuación de mV_0. Este es un ejemplo.

Una aplicación inmediata es la reordenación de la ecuación de tal forma que:

$$V_0 = (k/m)\,(\hbar^2/c^2) \tag{31}$$

podemos entonces resolver para el volumen de una partícula basados en la masa. El electrón no sería una esfera, sino un disco o anillo aplanado, posiblemente en rotación a fin de ocupar una región esférica y dando origen al espín. Para un electrón con una masa de 9.11×10^{-31} kg, V_0 es aproximadamente 1×10^{-79} m^3, y posee un radio de aproximadamente 4×10^{-13} m.

El radio de un electrón se estima aproximadamente como siendo 3.86×10^{-13} m, en base a su momento magnético y 1/2 del radio de Compton , ó 1.21×10^{-12} m. El análisis que sigue utiliza el valor de 3.86×10^{-13} para el radio.

Una forma esférica no resulta adecuada ya que $V_0 = 4/3\ \pi r^3 = 4/3 \times 3.14 \times 1.21 \times 10^{-12}$ m $= 9 \times 10^{-36}$ m^3 es demasiado grande.

Un disco aplanado con un radio de 1.21×10^{-12} y una espesor de 2.18×10^{-56} se ajusta mucho mejor al volumen. $V_0 = \pi r^2$ x espesor $= 3.14 \times (\ 1.21 \times 10\text{-}12)^2 \times 2.18 \times 10^{-56} = 1.00 \times 10^{-79}$. Una forma anular podría también existir y el radio de Compton podría ser más adecuado, pero el resultado a obtenerse en cualquier caso sería del mismo orden de magnitud.¿es entonces el espín elegido del plano o del disco en la

[3] La especulación aquí pertenece a este autor, no al Profesor Evans. Una carga puntual es hipotética y el tamaño del electrón puede caracterizarse a partir de un radio. El radio clásico del electrón, r_0, el radio de Compton, se define igualando la energía potencial electrostática de una esfera de carga e y radio r_0 con la energía de reposo del electrón, $U = e^2/ r_0 = m_e c^2$.

tercera y cuarta dimensiones? Esto es puramente especulativo, pero hay otros indicadores que señalan que el electrón bien podría ser un anillo. Luego podemos también considerar al protón.

Figura 9-5 Posible Forma del Electrón

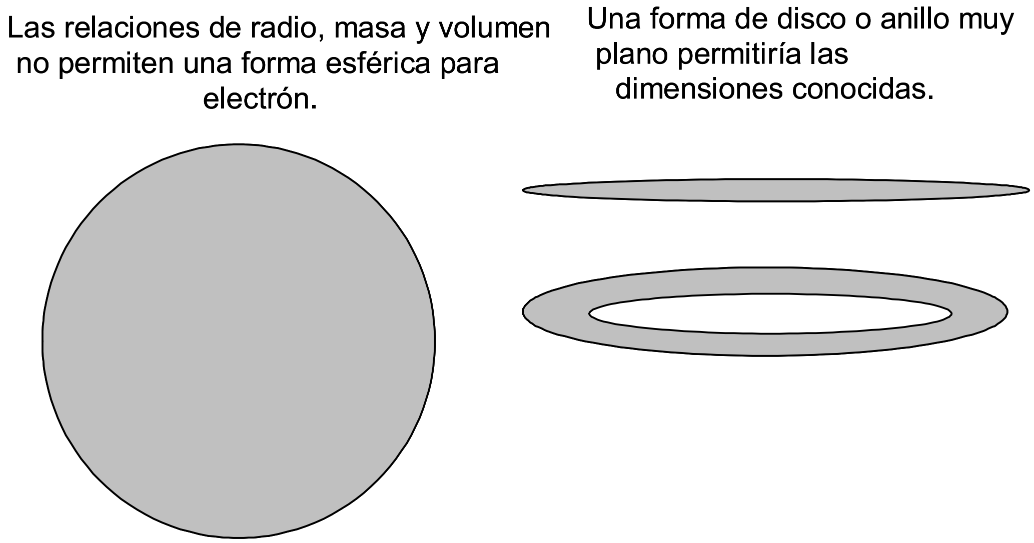
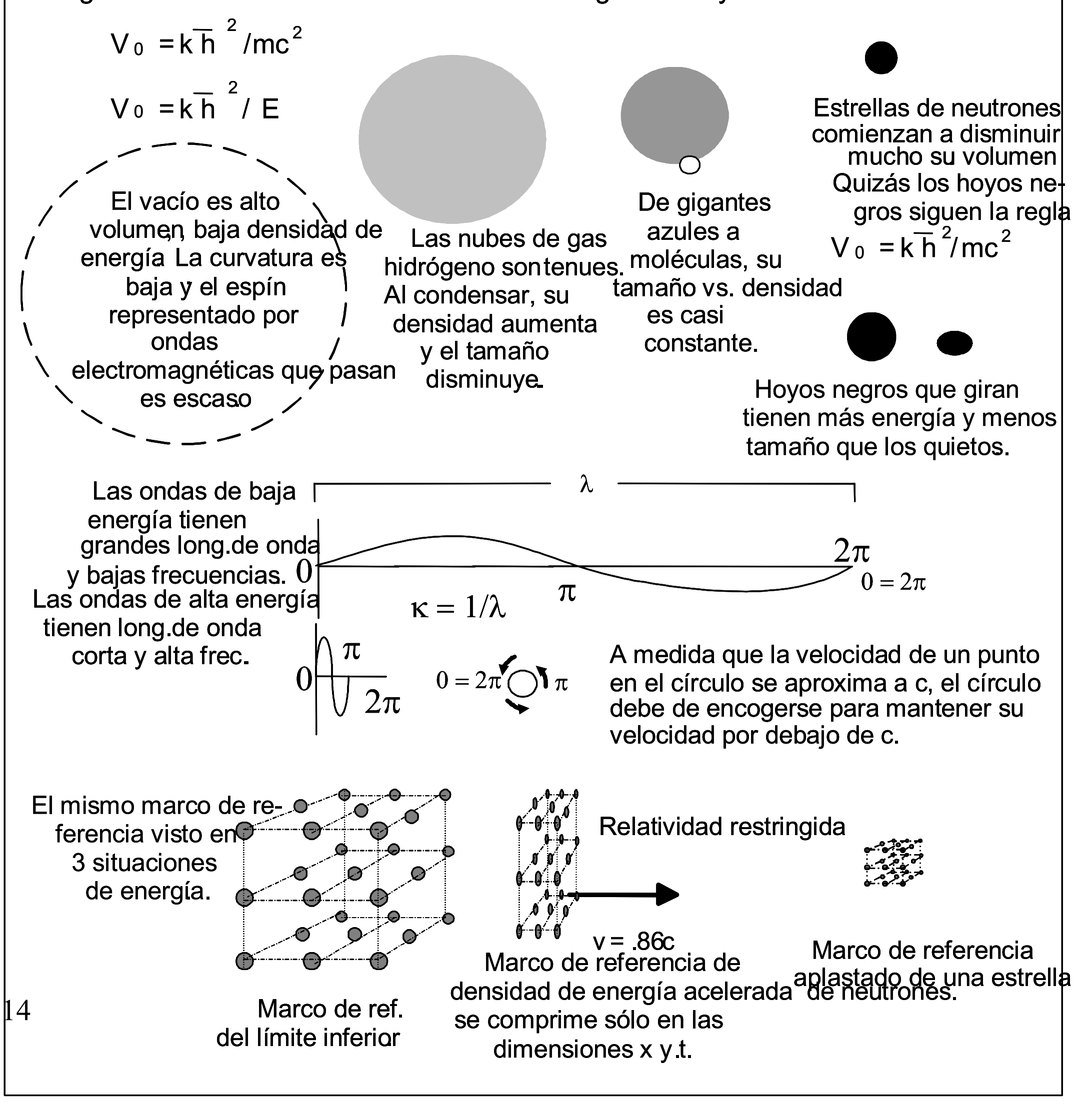


Figura 9-6 Relación Inversa entre Energía-Masa y Volumen



Resumen

Las dos nuevas ecuaciones introducidas aquí son:

$$E = \hbar c \sqrt{|R_0|} \qquad (1)$$

$$mV_0 = k\,\hbar^2 / c^2 \qquad (2)$$

la primera nos da el principio de mínima curvatura en tanto que la segunda nos da el volumen mínimo de una partícula. La Figura 9-6 nos muestra implicaciones del anterior. No conocemos exactamente por qué grandes masas contraen al espaciotiempo con respecto a nuestro marco de referencia de densidad de energía baja, pero podemos ahora describir matemáticamente otra parte del rompecabezas.

Las formulaciones mezclan relatividad general y mecánica cuántica y hay ecuaciones de teoría del campo unificado

Nunca en el pasado se habían definido curvaturas mínimas o volúmenes mínimos de partícula.

$\hbar = h/2\pi$, de manera que en términos de un círculo u oscilación, h es la circunferencia y $\hbar$ es el radio. Alternativamente, podemos ver a $\hbar$ como la frecuencia y h como en las Figuras 1 y 2. Entonces, en la ecuación (1), $E = \hbar c \sqrt{|R_0|}$, la energía es = frecuencia u oscilación por c y por κ ó 1/r. Tenemos una ecuación unificada cuántica y relativista.

$$mV_0 = k\,\hbar^2 / c^2 \text{ con } k = 8\pi G/c^2 \Rightarrow mV_0 = 8\pi G\,\hbar^2 / c^4 \qquad (31)$$

Hay varias formas de reordenamiento posibles, pero todas ellas aún son algo enigmáticas.

$1/r^2 = \kappa_0^2 = R_0 = kT_0$ Relatividad General

$\kappa_0^2 = 1/\lambda_c^2 = (mc/\hbar)^2$ Mecánica Ondulatoria

$kT_0 = (mc/\hbar)^2$ Teoría Unificada

$$V_0 = k\,\hbar^2 / E$$